2 集合と写像

現代数学では「数学的対象」はすべて集合と考える。集合は種々の数学的対象から諸特徴を取り除いていったときに残る共通部分のようなものである。簡単な概念に見えるが，逆説的にいうと，簡単だから難しいともいえる。

> 「直観または思考の対象のうちで一定範囲にあるものを 1 つの全体として考えたとき，それを (それらの対象の) **集合** (*set*) といい，その範囲内の個々の対象をその集合の**元** (*element*) または **要素** という。」

これは,「数学辞典」(岩波書店) に書いてある集合の (素朴な) 定義だが，なんとも歯切れの悪い表現になっており，これでは集合というものが何なのか良くわからない。次は一昨年出版された「数学入門辞典」(岩波書店) の集合の定義だが，やはりよく分からない。

> 集合とは，はっきりと区別できる「もの」の集まりである。集合 A を構成する「もの」を元または要素という。

集合の定義を厳密にしようと試みると種々の難しい問題が発生することが知られている。ここでは集合を数学的対象の集まりで，その集合に属しているかいないかが確定しているものと定義しておく。たとえば「10 以下の自然数」というとその集合に属しているものは確定している。「背の高い人」というと「背が高い」かどうかが確定しているわけではないので,「背の高い人の集まり」は集合とはいえない。

集合の本当の定義というのは当然あるのだが，それを厳密に書くと，もっとわけがわからなくなるので，ここではとにかく，何かを集めたらそれは集合だ，と思っていてもらえればよい。

2.1 集合の表し方

集合の表し方としては 2 通りの方法がある。まず第 1 の方法は，その元を全て列挙するというものである。たとえば「10 以下の自然数」の集合 A は

$$A = \{\,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\,\}$$

と表す。一般に，元が有限個であれば，集合を表すとき，それをすべて並べて括弧でくくって表す。

自然数全体の集合のように，無限個の元を含んでいるような集合の場合，全ての元を列挙するのは不可能なので,

$$\mathbb{N} = \{\,1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$$

などと，ちょっとごまかして書いたりする。この $\mathbb{N}$ という記号は，自然数全体の集合を表すものとして，数学において，標準的に使われているものである。数の集合を表す他の標準的な記号としては (すでに出てきている記号もあるが),

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

- 整数全体の集合 $\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$
- 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$
- 実数全体の集合 $\mathbb{R}$
- 複素数全体の集合 $\mathbb{C}$

などがある。

A を集合とする。a が A の元である，ということを，

$$a \in A \text{ または } A \ni a$$

という記号で表す。a は A の元ではない，ということは，

$$a \notin A \text{ または } A \not\ni a$$

という記号で表す。

「10 以下の自然数」の集合 A に対しては

$$1 \in A, \quad A \ni 3$$

であり，

$$0 \notin A, \quad A \not\ni 17$$

である。

元を 1 つも含まないものも集合として扱う。これを $\emptyset$ または $\{\ \}$ という記号で表し**空集合** (*empty set*) という。

集合を扱うときは,「ある条件満たすようなもの全体の集まり」というものを考えることが多い。集合を表す第 2 の方法は，その集合の元が満たすべき条件を指定する，というものである。

すなわち，$P(x)$ を命題関数とし，$P(x)$ が 真 となるような対象 x 全体の集合を

$$\{\, x \mid P(x) \,\}$$

で表す。$\{\, x\, ; P(x) \,\}$ と書くこともある。特に，$P(x)$ が集合 A の要素 x に関する命題関数とする時，$P(x)$ が 真 となるような A の要素 x 全体の集合を

$$\{\, x \in A \mid P(x) \,\}$$

で表す。$\{\, x \mid P(x), x \in A \,\}$ あるいは $\{\ x\ ;\ P(x),\ x \in A\ \}$ と書くこともある。

先ほどでてきた「10 以下の自然数」の集合 A は自然数の中で 10 以下という性質をもつ元の集まりなので

$$A = \{\, a \in \mathbb{N} \mid a \leqq 10 \,\}$$

という書き方ができる。$\mathbb{Z}$ を整数全体のつくる集合とするとき，

$$A = \{\, a \in \mathbb{Z} \mid 1 \leqq a,\ a \leqq 10 \,\}$$

とも書ける (通常は $A = \{\, a \in \mathbb{Z} \mid 1 \leqq a \leqq 10 \,\}$ と略記する)。このように集合を現す記号の中でカンマは**「かつ」の意味にとる**ものとする。

例 2.1

(1) 正の実数全体の集合は，$\{\, x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \,\}$ と表される。

(2) 偶数である自然数全体の集合は，$\{\, 2, 4, 6, 8, \cdots \,\}$ と書いても大体意味は通じる。しかし厳密に言うと，これでは 8 の後にどのような数が来るのかはわからない。

上の定義に従って，$\{\, n \in \mathbb{N} \mid n$ は偶数$\,\}$ と書いた方が，正確ではある。しかし，ちょっと変則的ではあるが，$\{\, 2k \mid k \in \mathbb{N} \,\}$ と書いた方が，書き方としてはより自然であって，このような表現の方がよく使われる。

要は，縦棒の左側にその集合の要素を書き，右側にその要素が満たすべき条件を書く，ということである。奇数である自然数全体の集合も，この書き方で行くと，$\{\, 2k - 1 \mid k \in \mathbb{N} \,\}$ と書ける。

演習問題 2.1

(1) 5 の倍数となるような自然数全体の集合を表せ。
(2) 4 で割ると余りが 3 となるような自然数全体の集合を表せ。
(3) 3 で割ると余りが 2 であり，5 で割ると余りが 3 となるような自然数全体の集合を表せ。

2.2 集合の包含関係と同等性

定義 2.2

(1) 2 つの集合 A，B に対し，集合 B の任意の元が集合 A の元であるとき，

$$B \subseteq A, \qquad A \supseteq B$$

と書いて，B は A の**部分集合** (*subset*) であるという。「B は A に含まれる」という言い方もする。

(2) $B \subseteq A$ かつ $A \subseteq B$ が成り立つとき，2 つの集合は等しいと定義し，$A = B$ と書く。

(3) $B \subseteq A$ かつ $A \neq B$ のとき B は A の**真部分集合** (*proper subset*) であるという。$B \subseteq A$ と書いたときは，B が A の真部分集合かもしれないし，$B = A$ かもしれない。真部分集合であることをはっきり表したいときは，

$$A \subsetneq B, \qquad B \supsetneq A$$

などと書く。

例 2.3

(1) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

(2) $\{\, 4k \mid k \in \mathbb{N} \,\} \subseteq \{\, 2k \mid k \in \mathbb{N} \,\}$

演習問題 2.2

(1) 例 2.3 の (2) を証明せよ。
(2) $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$ ではないことを上の定義に基づいて証明せよ。
(3) $\mathbb{N} = \mathbb{Z}$ ではないことを上の定義に基づいて証明せよ。

演習問題 2.3 次の集合 A に対しその部分集合をすべて列挙せよ。またその部分集合の間に成立する包含関係 ($\subseteq, \not\subseteq$) を調べよ。

(1) $A = \{\, 1, 2, 3 \,\}$ (2) $A = \{\, 1, 2, 3, 4 \,\}$

2.3 集合演算

定義 2.4

(1) A, B を集合とする。

$$A \cup B = \{\, x \mid x \in A \text{ または } x \in B \,\}$$

を A と B の **和集合** (union) という。

(2)

$$A \cap B = \{\, x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B \,\}$$

を A と B の **共通部分** (intersection) という。

(3)

$$A \cap B = \emptyset$$

のとき A と B は**互いに素** (disjoint) であるという。

演習問題 2.4 次の A, B,C に関し $A{\cap}B$, $A{\cup}B$, $B{\cap}C$, $B{\cup}C$, $A{\cap}C$, $A{\cup}C$,$(A{\cap}B){\cap}C$,$(A{\cup}B){\cup}C$ を求めよ。また $A \cap (B \cup C)$,$(A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C)$,$(A \cup B) \cap (A \cup C)$ を求めよ。

(1) $A = \{\,1, 2, 3, 4\,\}$,$B = \{\,1, 3, 5, 6\,\}$,$C = \{\,1, 2, 6, 7\,\}$

(2) $A = \{\,1, 2, 3, 4, 5\,\}$,$B = \{\,1, 2, 3\,\}$,$C = \{\,5, 6, 7\,\}$

(3) $A = \{\,1, 2, 3, 4\,\}$,$B = \{\,1, 3, 5\,\}$,$C = \{\ \}$

演習問題 2.5 A, B, C を集合とする。

(1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

を証明せよ。

[**ヒント：**] これらは，２つの集合が等しい，ということを示す問題である。２つの集合 A, B が $A = B$ である，ということの定義は,「 $A \subseteq B$ かつ $B \subseteq A$ 」 ということだったので，$A = B$ を示せ，ということは,「 $A \subseteq B$ かつ $B \subseteq A$ 」 を示せ，ということである。

$A \subseteq B$ の定義は,「 A の全ての元が B に含まれる 」 ということだったので，上の問題 (1) について言うならば,

$x \in A \cap (B \cup C)$ ならば $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ であることを示し，$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ならば $x \in A \cap (B \cup C)$ であることを示せば良い，ということになる。

定義 2.5

(1) A および B を集合とするとき

$$A - B = \{\, x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B \,\}$$

と定義し，A と B の**差集合** (difference set) という。$A - B$ は，$A \backslash B$ と書くこともある。

(2) ある集合 X があって，全ての議論が X の中で行われる，ということを前提としているとき，X を **全体集合** (*total set*) または**普遍集合** (*universal set*) という。

X が全体集合のとき，部分集合 $A \subseteq X$ に対して，$X - A$ を A^c と書き A の **補集合** (*complement*) という。$A^c = \{\, x \in X \mid x \notin A \,\}$ である。

(3) 対象 a, b の**順序対** (orderd pair) を (a, b) で表す。$a = c$ かつ $b = d$ のとき $(a, b) = (c, d)$ であると決める。

(4) 集合 A, B に対して，$a \in A$, $b \in B$ の順序対 (a, b) の全体からなる集合を $A \times B$ で表して，集合 A, B の **直積集合** (direct product) という。

(5) 同様に，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ を集合とした時，

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{\, (a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in A_i \quad (1 \leqq i \leqq n) \,\}$$

を $A_1, A_2, \cdots, A_n$ の積集合という。

$\mathbb{R}$ は実数全体の集合，$\mathbb{C}$ は複素数全体の集合であった。n 個の $\mathbb{R}$ の積集合を $\mathbb{R}^n$, n 個の $\mathbb{C}$ の積集合を $\mathbb{C}^n$ と書く。

$\mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ なので，２つの実数 x, y のペア (x, y) というもの全体の集まりである。(x, y) は平面上の点と見なすことができるので，$\mathbb{R}^2$ は平面上の点全体の集合と見なすことができ，2 次元平面と同一視することができる。同様に，$\mathbb{R}^3$ は 2 次元空間と見なすことができる。

演習問題 2.6　演習問題 2.4 の集合 A, B に対し $A - B$, A^c, $A \times B$ を求めよ。ただしここで全体集合は $X = \{\, 1, 2, \ldots, 7 \,\}$ とする。

演習問題 2.7　X を全体集合とし A と B をその部分集合とするとき，次を証明せよ。

(1) $B \subseteq A \iff B^c \supseteq A^c$

(2) De Morgan の法則

$$\begin{aligned} (A \cup B)^c &= A^c \cap B^c \\ (A \cap B)^c &= A^c \cup B^c \end{aligned}$$

論理と集合との間に成立する関係を見よう。U を全体集合とする。U の部分集合 A および B がある条件 $P(x)$ および $Q(x)$ を用いて

$$A = \{\, x \in U \mid P(x) \,\} \quad B = \{\, x \in U \mid Q(x) \,\}$$

と書かれているとする。このとき

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{\, x \in U \mid P(x) \wedge Q(x) \,\} \\ A \cup B &= \{\, x \in U \mid P(x) \vee Q(x) \,\} \\ A^c &= \{\, x \in U \mid \neg P(x) \,\} \end{aligned}$$

が成立する。また任意の $x \in U$ に対し $P(x) \Longrightarrow Q(x)$ が成立する必要十分条件は

$$A \subseteq B$$

が成立することである。

この対応関係があるので命題 1.1 の (4)，(5) も，演習問題 2.7 の (2) も共に De Morgan の法則と呼ばれる。