

2.4 写像

A, B を集合とする。 A, B を集合とする。 A の各要素 a に対し B の要素 b を対応させる規則 f を, 集合 A から集合 B への写像 (mapping, map) といい,

$$f: A \longrightarrow B, \quad \text{または} \quad A \xrightarrow{f} B$$

のように表す。

要素 $a \in A$ に対応する要素 $b \in B$ を写像 f による a の像 (image) といい, $b = f(a)$ と表す。逆に, a を f による b の原像 (preimage) という。

元 x に対し $f(x)$ が対応しているとき $x \mapsto f(x)$ と書くことがある。これをひとまとめにして書くこともある。例えば 2 次関数 $y = f(x) = x^2$ は実数全体の集合 \mathbb{R} から \mathbb{R} への写像と考えることができる。実数 $x \in \mathbb{R}$ に対し x^2 を対応させるので

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

と書くことができる。

定義 2.6

- (1) 写像 $f: A \longrightarrow B$ において, A を定義域 (domain) といい, B を終域 (codomain) という。 $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$ を値域 (range) あるいは像 (image) という。
- (2) 集合 A から A 自身への写像で, 任意の要素 $a \in A$ を a に写す写像を恒等写像 (identity map) といい, id_A または 1_A という記号で表す (すなわち任意の $a \in A$ に対し $id_A(a) = a$ である)。
- (3) 写像 $f: A \longrightarrow B$ において $f(A) = B$ のとき, f を A から B への全射 (surjection), または上への写像 (onto map) という。
- (4) 写像 $f: A \longrightarrow B$ において $a_1 \neq a_2$ となる全ての $a_1, a_2 \in A$ に対して, 常に $f(a_1) \neq f(a_2)$ となる時, f を単射 (injection), または 1 対 1 の写像 (one-to-one map) という。
- (5) 写像 $f: A \longrightarrow B$ が全射かつ単射である時, 全単射 (bijection) という。
- (6) 2つの写像 $f: A \longrightarrow B, g: B \longrightarrow C$ に対し, $h(a) = g(f(a))$ で定められる写像 $h: A \longrightarrow C$ を定義できる。これを f と g の合成写像 (composite mapping) といい, $h = g \circ f$ という記号で表す。

A, B が実数や複素数の部分集合のとき写像 $f: A \longrightarrow B$ を関数 (function) と呼ぶことが多い。 $f: X \longrightarrow Y$ が関数のとき y が x の式で与えられる場合がよくある。例えば $y = x^2$ の関係があるとき $y = f(x) = x^2$ という関係がある。この $y = f(x) = x^2$ は像であって関数 (写像) ではないが, 歴史的用法により, 関数 $y = f(x) = x^2$ という表現をすることがある。解析学においてはむしろこの表現の方が多いかもしい。

このプリントも含め講義関連のプリントは <http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html> においてある。

定義域が明示的に述べられていないとき，考えられる最大の集合をとることも多い。例えば定義域の指定なしに関数 $y = \frac{1}{x}$ と言った場合，解析学では通常実数値関数の範囲で考えるので， $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ と考える。

例 2.7

(1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ と定義するとき，通常 2 次関数と呼ばれる。この場合，定義域は \mathbb{R} であり，終域も \mathbb{R} である。 $f(1) = f(-1) = 1$ が成立する。すなわち，異なる 2 つの点の行き先で同じになるものがあるので f は単射ではない。

値域 $f(\mathbb{R})$ は 0 以上の実数全体の集合 $f(\mathbb{R}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = [0, \infty)$ である。よって f は全射ではない。

(2) $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ を $f(x) = x^2$ で定義すると，この f は (1) の f と終域を除いて同じ値をとる写像であるが，(1) の f は全射ではないが，(2) の f は全射である。

(3) $f(x) = x^2$ という同じ 2 次関数を考える。しかし今度は，定義域を制限して， f を $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ という写像と考える。値域 $f([0, \infty))$ はやはり $[0, \infty)$ となる。

この場合， f は $[0, \infty)$ 上では単調増加であり， $x_1 \neq x_2$ ならば必ず $f(x_1) = x_1^2 \neq x_2^2 = f(x_2)$ となるので単射である。しかし全射ではないことは明らかである。

(4) しつこく $f(x) = x^2$ という同じ 2 次関数を考える。しかし今度は，定義域と終域を共に制限して， f を $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ という写像と考える。

(3) で述べた理由から f は単射であり，さらに，値域 $f([0, \infty))$ は $[0, \infty)$ であるので全射となり，全単射となる。

演習問題 2.8 以下の (1)~(9) の写像について，

- (a) 単射であるが全射ではない。
- (b) 全射であるが単射ではない。
- (c) 単射でも全射でもない。
- (d) 全単射である。

のどれに相当するのかを判定せよ。

- (1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = e^{x^{(1)}}$ と決める。
- (2) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = e^x$ と決める。
- (3) $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ を $f(x) = e^x$ と決める。
- (4) $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ を $f(x) = e^x$ と決める。
- (5) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = \log x$ と決める。
- (6) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = \cos x$ と決める。
- (7) $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ を $f(x) = \cos x$ と決める。
- (8) $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ を $f(x) = \cos x$ と決める。
- (9) $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = \cos x$ と決める。

命題 2.8 $f: A \rightarrow B$ が全単射であれば， B の任意の要素 b に対して， $f(a) = b$ となる A の要素 a がただ一つ存在する。

証明 $f: A \rightarrow B$ は全射なので， $f(A) = B$ である。従って， B の任意の要素 b に対して， $b \in f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$ なので，ある $a \in A$ が存在して， $b = f(a)$ となっている。

⁽¹⁾高校で数学 III を学んでいない学生は初めてかもしれないが， e は自然対数の底と呼ばれる重要な数である。値は 2.71828... である。これに関しては後で取り扱う。ここでは e は 1 より大きい実数であることを知っていればよい。

f は単射なので, $f(a_1) = f(a_2) = b$ であるとする $a_1 = a_2$ でなければならない。すなわち, $f(a) = b$ となるような a はただ一つである。■

$f: A \rightarrow B$ が全単射である時, $b \in B$ に対して, このような $a \in A$ を対応させる写像が定義できる。これを f の逆写像 (inverse map) といい, $f^{-1}: B \rightarrow A$ という記号で表す。すなわち, $f(a) = b$ の時, $f^{-1}(b) = a$ である。従って特に,

$$f^{-1} \circ f = id_A \quad f \circ f^{-1} = id_B$$

が成り立つ。

例 2.9

- (1) $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ を $f(x) = e^x$ とすると f は全単射である。従って, f の逆写像 $f^{-1}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する。これが $f^{-1}(x) = \log x$ である。
- (2) $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ を $f(x) = x^2$ とすると全単射となる。従って, この逆写像 $f^{-1}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ が存在する。これが $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ である。
- (3) $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ を $f(x) = \sin x$ とすると全単射である。従って, 逆写像 $f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ が存在する。この関数を $f^{-1}(x) = \arcsin x$ と書き, アークサイン x と読む。 $\sin^{-1} x$ と書かれることが多いが, 間違いやすい記号なので, この講義では採用しない。

命題 2.10 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow A$ であり, $g \circ f = id_A$ であったとする。

- (1) f は単射である。
- (2) g は全射である。

証明 (1) の証明: $a_1, a_2 \in A$ を $a_1 \neq a_2$ となるものとする。 $g \circ f = id_A$ であるので,

$$g(f(a_1)) = a_1 \neq a_2 = g(f(a_2))$$

である。 $f(a_1) = f(a_2)$ ならば, 当然 $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$ とならなければならないが, $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$ であるので, $f(a_1) \neq f(a_2)$ であり, 従って f は単射である。

(2) の証明: $g \circ f = id_A$ であるので, $g(f(A)) = A$ である。 $f(A) \subseteq B$ であるから, $g(B) \supseteq A$ である。しかし, $g(B) \subseteq A$ であるから, $g(B) = A$ が成り立つ。■

演習問題 2.9 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ とする。

- (1) f と g が単射ならば, $g \circ f: A \rightarrow C$ も単射であることを証明せよ。
- (2) f と g が全射ならば, $g \circ f: A \rightarrow C$ も全射であることを証明せよ。

ヒント: 単射と全射の定義が満たされることを示せば良い。

演習問題 2.10 X, Y を集合とし, $f: X \rightarrow Y$ とする。 A, B を X の部分集合とする。

- (1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ を証明せよ。
- (2) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ を証明せよ。
- (3) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ とはならない例を挙げよ。

ヒント: (1), (2) については, 問題 2.5 のヒントを参照。(3) については, そういう例を作れば良い。