

4.4 対数関数

$a \neq 1$ を正の実数として $f(x) = a^x$ を指数関数とする。指数関数の性質のところでも述べたように、 $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ は単調増加か単調減少であるので単射である。また、 $(0, \infty)$ の全ての値をとるので全射である。すなわち、全単射である。

従って、逆関数 $f^{-1}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する。この関数を $\log_a x$ と書き、 a を底とする対数関数という。

$$y = a^x \iff x = \log_a y$$

指数法則より、次が成り立つ。

命題 4.11 (1) 任意の正の実数 p, q に対して次が成り立つ。

$$\log_a pq = \log_a p + \log_a q$$

(2) 任意の正の実数 p と任意の実数 c に対して次が成り立つ。

$$\log_a p^c = c \log_a p$$

(3) (底の変換) 1 ではない任意の正の実数 a, b と任意の正の実数 p に対して次が成り立つ。

$$\log_a p = \frac{\log_b p}{\log_b a}$$

証明 (1) a^x という関数は任意の正の実数をその値として持つから、任意の正の実数 p, q に対してある実数 s, t があって $p = a^s, q = a^t$ となる。指数法則から、 $r = a^{s+t}$ とおくと、 $r = a^{s+t} = a^s a^t = pq$ である。また、対数関数の定義から、 $s = \log_a p, t = \log_a q, s + t = \log_a r = \log_a pq$ であるから、 $\log_a r = \log_a pq = \log_a p + \log_a q$ となる。

(2) $p = a^s$ とする。指数法則から $p^c = (a^s)^c = a^{cs}$ であるから、 $\log_a p^c = cs = c \log_a p$ が成り立つ。

(3) $b^u = p, b^v = a$ とすると $\log_b p = u, \log_b a = v$ である。

$$p = b^u = b^{\frac{u}{v} \cdot v} = (b^v)^{\frac{u}{v}} = a^{\frac{u}{v}}$$

であるから、

$$\log_a p = \frac{u}{v} = \frac{\log_b p}{\log_b a}$$

となる。■

この命題から、次がわかる。

このプリントも含め講義関連のプリントは <http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html> においてある。

系 4.12 (1) $\log_a \frac{1}{p} = -\log_a p$.

(2) $\log_a \frac{p}{q} = \log_a p - \log_a q$

このように対数は、積の計算が和の計算に置き換わる、という画期的な性質を持っている。計算機などはなく、全てを手計算で行っていた時代では、これによる恩恵は、計り知れないものがある。対数は、スコットランドのジョン・ネイピア (1550–1617) とスイスのヨブスト・ビュルギ (1552–1652) によって同じ頃に発見されたと言われているが、世に知られて、広く使われるようになったのは、ネイピアによる著作「対数の驚くべき規則の叙述」(1614年) と「対数の驚くべき規則の構成」(1619) による。これらの本の中には、ネイピアが 20 年かけて計算した詳細な対数表が含まれており (もちろん全て手計算であるにもかかわらず、ほとんど誤りがなかった)、その後のあらゆる分野における数値計算の労力を劇的に軽減した。その意味でネイピアは、その後の科学技術の発展に多大な貢献をなしたと言える。(実際にはその後、ヘンリー・ブリッグズ、アドリアン・ヴラックらがネイピアとの議論に基づいて対数表を改良し、より詳細な表を作って 1628 年に発表した。その対数表は 20 世紀に至るまで、ほとんど全ての対数表の基礎となった。)

また、数を小数を用いて表すという、現在普通につかわれている表記方法は、ネイピアによって考え出され、上記の本で初めて現れた (小数の基本的な考え方やある種の表記方法は以前からあったが、普及していなかった)。当時から精密な計算は 7 ~ 8 桁の精度で行われていたが、例えば 12.345678 は $12 \frac{345678}{1000000}$ などと書かれていた。

ちなみに、自然対数の底 e をネイピアの定数 というが、実際、彼が最初に考えた対数は、 e という数を意識はしていなかったが、基本的には自然対数であった。その後、より計算に便利な、10 を底とする常用対数を提案するようになる。

演習問題 4.7

- (1) a, b, c を正の実数とする。 $a^b = c^{b \log_c a}$ を示せ。
 (2) a, b, c を正の実数とする。 $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ を示せ。

対数関数のグラフ 対数関数は指数関数の逆関数なので、そのグラフは、対応する指数関数のグラフを $y = x$ に関して対称に写せばよい。

任意の正の実数 a に対して、 $a^0 = 1$ なので $\log_a 1 = 0$ である。

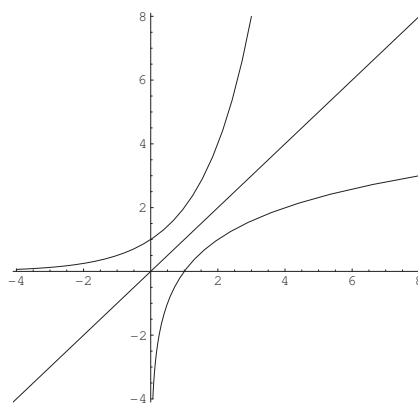


図 4.5: $y = 2^x$ と $y = \log_2 x$ のグラフ

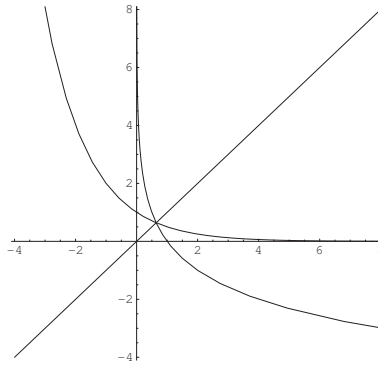


図 4.6: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ と $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフ

4.5 逆三角関数

三角関数 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数を考えてみよう。逆関数は、全単射になっていなければ定義できないが、 $\sin x$, $\cos x$ は実数全体で定義された関数と見なすと単射ではない。そこで、逆関数を考えるためには、定義域を限定して、全単射になるような部分だけを取り出す必要がある。

$\sin x$ や $\cos x$ がその上で全単射になるような区間は無数にあり、そのうちのどれを採用したとしても、そこに限定した $\sin x$ や $\cos x$ は、当然、逆関数を持つ。そのような区間として、最も「標準的な」ものとしては、次のようなものが考えられる。

$f(x) = \sin x$ とする。この関数の定義域を $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ に制限した関数 f (名前を変更する必要があるかもしれないが、ここでは混同して用いる) を

$$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

とすると、 f は全単射になる。従って、逆関数

$$f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

が存在する。これを $\arcsin x$ と書く (アークサイン と読む)。 $\sin^{-1} x$ という記法も用いられるが、誤解を生みやすい記号なのでこの講義では採用しないことにする。

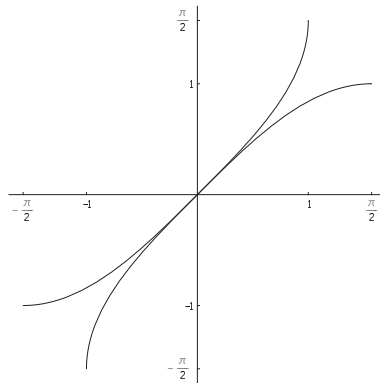


図 4.7: $\sin x$ と $\arcsin x$

$g(x) = \cos x$ とする。この関数の定義域を $[0, \pi]$ に制限した関数 g (名前を変更する必要があるかもしれないが, ここでは混同して用いる) を

$$g: [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$

とすると, g は全単射になる。従って, 逆関数

$$g^{-1}: [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

が存在する。これを $\arccos x$ と書く (アークコサインと読む)。 $\cos^{-1} x$ という記法も用いられるが, 誤解を生みやすい記号なのでこの講義では採用しないことにする。

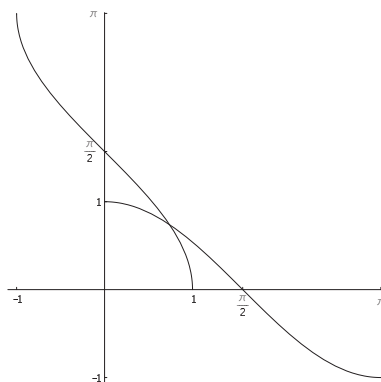


図 4.8: $\cos x$ と $\arccos x$

$\tan x$ は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ から \mathbb{R} への全単射であるから, \mathbb{R} から $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ への逆関数が存在する。これを $\arctan x$ などと書き, アークタンジェント x と読む。 $\tan^{-1} x$ という記法も用いられるが, 誤解を生みやすい記号なのでこの講義では採用しないことにする。

$\arctan x$ は実数全体で定義された関数なので, $\frac{\pi}{2} + n\pi$ という点で値が定義されない $\tan x$ と比べると, どちらかと言うと, より「まともな」関数である, という見方もできる。

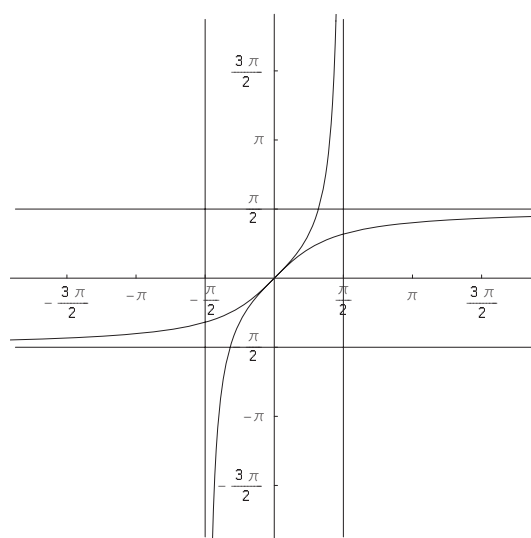


図 4.9: $\tan x$ と $\arctan x$ のグラフ

演習問題 4.8

(1) 次の値を求めよ。

$$\arcsin \frac{1}{2}, \quad \arccos \frac{1}{2}, \quad \arctan 1, \quad \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \arctan \sqrt{3}, \quad \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(2) $-1 \leq x \leq 1$ の時, $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ を示せ。

(3) $x > 0$ の時, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ を示せ。

(4) $\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ を示せ。

4.6 双曲線関数

講義では省略したが, 双曲線のパラメータ表示には次に紹介する双曲線関数を用いられる。積分でも使用する場合があるので関数を紹介しておく。パラメータ表示について一言だけふれておくと, $x = \cos t, y = \sin t$ は楕円の標準形ともいえる「円」

$$x^2 + y^2 = 1$$

のパラメータ表示を与えるのに対し, ここで定義する項曲線関数は双曲線の標準形ともいえる「直角双曲線」

$$x^2 - y^2 = 1$$

のパラメータ表示を与える。

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

を双曲線関数という。cosh はハイパボリック・コサインなどと読む⁽¹⁾。

演習問題 4.9 次を示せ。

(1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

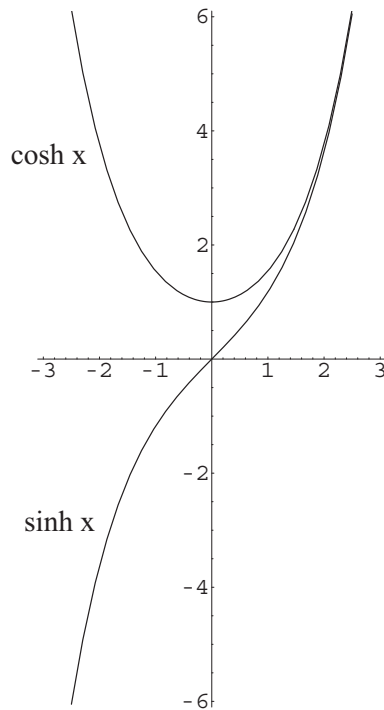
(2) $\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$

(3) $\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b$

明らかに $\cosh x$ は偶関数であり, そのグラフは y 軸に対して対称となるが, さらに $[0, \infty)$ では単調増加となっている (微分してみるとわかる)。従って, $\cosh x$ は $[0, \infty)$ に制限すると, $[0, \infty)$ から $[1, \infty)$ への全単射を与える。

また, $\sinh x$ は奇関数であり, そのグラフは原点に関して点対称である。 $\sinh x$ は \mathbb{R} 全体で単調増加であり (微分してみるとわかる), 実数全ての値をとるので, \mathbb{R} からそれ自身への全単射を与える。

⁽¹⁾ $\cosh x$ を $\cos(hx)$ だと勘違いするものがあるが, 括弧を用いて表すと $\cosh(x)$ であることに注意。



演習問題 4.10

(1) $\cosh x$ を $[0, \infty)$ に制限した関数の逆関数を $\cosh^{-1} x$ とする。これは $[1, \infty)$ から $[0, \infty)$ への関数である。

$$\cosh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

であることを示せ。

(2) $\sinh x$ の逆関数を $\sinh^{-1} x$ とする。これは \mathbb{R} 全体で定義された関数である。

$$\sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

であることを示せ。

(3) $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ とする。任意の x に対して $|\tanh x| < 1$ を示せ。

(4) $\tanh x$ は単調増加関数であることを (微分を使わずに) 示せ。

$x \rightarrow -\infty$ のとき $\tanh x \rightarrow -1$ であり, $x \rightarrow \infty$ のとき $\tanh x \rightarrow 1$ であることがわかるので, $\tanh x$ は \mathbb{R} から $(-1, 1)$ への全単射を与える。従って, その逆写像 $\tanh^{-1} x$ は, $(-1, 1)$ 上で定義され, \mathbb{R} 全体の値をとる単調増加関数となる。

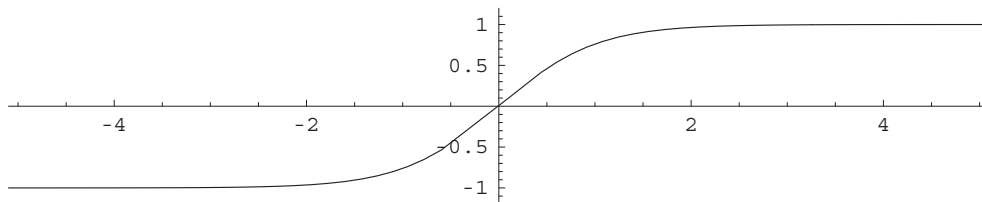


図 4.10: $\tanh x$ のグラフ