数学序論要綱 #10　　2007–6–27　　河野

5　微分法

微分法の最初に数列及び関数の極限に簡単に関し復習しておく。

5.1　数列の極限

各自然数 n に対し，数 a_n が定められているとき $\{a_n\}$ を**無限数列**という (以下単に**数列**という)。n を限りなく大きくしたとき a_n がある一定の値 α に限りなく近づくとする。このとき数列 $\{a_n\}$ は α に**収束する**(1)といい，α をその**極限値**という。このとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

あるいは

$$a_n \to \alpha \quad (n \to \infty)$$

と書く。$\{a_n\}$ が収束しないとき，**発散する**という。発散するとき，$n \to \infty$ のときの a_n の挙動は様々であるが，特に $a_n \to \infty$ あるいは $a_n \to -\infty$ のとなるとき，$\pm\infty$ は数ではないが，便宜的に

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{または} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

と書く。

例 5.1 **(1)**　$a_n = \dfrac{1}{n}$ のとき，即ち

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

となる数列を考える。$n \to \infty$ としたとき，$\dfrac{1}{n}$ は 0 に近づく。即ち

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

が成立する。

(2)　$a_n = n^2$ とおくと a_n は収束しないが，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

である。

(3)　$a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ とおくと a_n は収束しない。また $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ も成立しない。

(4)　a を実数とする。$a_n = a^n$ とおくとき $\lim_{n\to\infty} a_n$ はどうなるだろう。数学 III で学んだように a の値によって異なる。最初は例を見よう。$a = 2$ とする。$a_1 = 2$ であり $a_2 = 4$ である。一般に $a_{n+1} = 2^{n+1} =$

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

(1) これは直感的説明であり厳密な定義ではない。厳密には次に述べる「ε-N 論法」と呼ばれる方法で定義される。この講義ではこの論法に深入りはしない。数列 a_n が次を満たすとき「数列 a_n は α に収束するといい，$\lim_{n\to\inf} a_n = \alpha$ と書く；任意の正の実数 ε に対しある自然数 N が存在して，任意の自然数 n に対し $n > N \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成立する。

$2\,2^n = 2a_n$ が成立するので，前の項の 2 倍になっている。n が大きくなるにしたがい a_n は大きくなる。よって

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

が成立している。次に $a = \dfrac{1}{2}$ の場合を考える。$a_{n+1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{1}{2}a_n$ が成立するので，前の項の $\dfrac{1}{2}$ 倍になっている。よって

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

が成立している。数列 $a_n = a^n$ の収束・発散は次のようになっている。

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty \quad (\text{発散}) & a > 1 \\ 1 & a = 1 \\ 0 & -1 < a < 1 \\ \text{発散} & a \leqq -1 \end{cases}$$

定理 5.2 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$ (α, β は有限値) のとき

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(ka_n) = k\lim\limits_{n\to\infty} a_n = k\alpha$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha \pm \beta$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\, b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha\,\beta$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ 　(ただし $\beta \neq 0$ とする。)

が成立する。

(1)〜(4) は直感的には明らかであろうが[(2)]，たとえば (3) は次のことよりわかる。

$$\begin{aligned} \alpha\beta - a_n b_n &= (\alpha\beta - a_n\beta) + (a_n\beta - a_n b_n) \\ &= (\alpha - a_n)\beta + a_n(\beta - b_n) \end{aligned}$$

ここで $\{\, a_n \,\}$ は収束すると仮定したので，$|a_n|$ は有界，すなわちある定数 $K > 0$ より小さい ($|a_n| < K$)。よって $n \to \infty$ のとき

$$\begin{aligned} |(\alpha - a_n)\beta| &= |\alpha - a_n| \cdot |\beta| \to 0 && (\because |\alpha - a_n| \to 0) \\ |a_n(\beta - b_n)| &\leqq K|\beta - b_n| \to 0 && (\because |\beta - b_n| \to 0) \end{aligned}$$

よって $a_n b_n \to \alpha\beta$ $(n \to \infty)$ が成立する。 ∎

この定理により，数列の各項がいくつかの代数的結合 (和・差・積・商) で表されるときは，その各々の極限値がわかれば容易にその極限値はもとまる。しかし (4) において，$a_n, b_n \to 0$ $(n \to \infty)$ となる場合や，a_n, b_n が $\pm\infty$ に発散する場合は $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ は形式的には $\dfrac{0}{0}$ や $\dfrac{\infty}{\infty}$ となり，値が定まらないように見える (実際には収束する場合も発散する場合もある)。このような場合を**不定形**という。微積分においては不定形の極限が大事なことが多い。

[(2)] ここでも厳密には「ε-N 論法」で証明される。ここでの「証明」は厳密な意味では「証明」ではなく説明である。

例 5.3 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+2}$ をもとめよ。

分子，分母は $n\to\infty$ のとき ∞ になるが，それらの比自体は有限値に収束することがありうる。この場合も n が十分大きければ，$n+2$ と n の比はほぼ 1，同様に $\sqrt{n^2+1}$ と $\sqrt{n^2}=n$ の比も同様，したがって $\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}\fallingdotseq 1$，$\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}\to 1$ となることが予想される。実際

$$\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+2}=\frac{\sqrt{n^2+1}\times\dfrac{1}{n}}{(n+2)\times\dfrac{1}{n}}=\frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}{1+\dfrac{2}{n}}\to 1\qquad(n\to\infty)$$

すなわち

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+2}=1$$

である。

演習問題 5.1　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n-1}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2+n+1}$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n+1}}{n+2}$　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n-1}$

これらの例・演習問題では分子・分母の増大度を比較的容易にくらべることができた。しかし一般には単純でない。よく分からない数列を知られた数列ではさむことにより数列の極限を求める方法が知られている。次の定理がそれである。

定理 5.4 [**はさみうちの定理**] 任意の自然数 n に対し

$$b_n\leqq a_n\leqq c_n$$

が成立しているとする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$ のとき a_n も収束し，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$$

が成立する。

例 5.5 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0\ (a>0)$ を示せ。

$N>a$ となる自然数 N を 1 つ選んで固定する。$n>N$ とする。$k>N$ のとき $\dfrac{a}{k}<\dfrac{a}{N}$ が成立することに注意すると

$$\begin{aligned}0<\frac{a^n}{n!}&=\frac{a}{1}\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{N-1}\frac{a}{N}\cdots\frac{a}{n}\\&<\frac{a}{1}\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{N-1}\underbrace{\frac{a}{N}\frac{a}{N}\cdots\frac{a}{N}}_{n-N+1\text{ 個}}=\frac{a}{1}\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{N-1}\left(\frac{a}{N}\right)^{n-N+1}\end{aligned}$$

という不等式が成立する。ここで $b_n=0$，$c_n=\dfrac{a}{1}\dfrac{a}{2}\cdots\dfrac{a}{N-1}\left(\dfrac{a}{N}\right)^{n-N+1}$ と定義し，これに定理 5.4 を適用する。$\dfrac{a}{N}<1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{N}\right)^{n-N+1}=0$ となる。よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$ が得られる。∎

この例は $a^n\ (a>1)$ の増大度より，$n!$ の増大度の方がさらに大きいことを意味する。

演習問題 5.2 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{2^n}=0$ を示せ。

(ヒント) $a_n=\dfrac{n^3}{2^n}$ とする。n を十分大きくすれば $\dfrac{1}{2}<r<1$ となる適当な r を選んで $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<r$ とできる。

$\dfrac{\infty}{\infty}$ や $\dfrac{0}{0}$ の形の不定形の他の不定形の極限としては $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$ のように $\infty-\infty$ の形などもある。

例 5.6 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\frac{1}{2}$

$$\sqrt{n^2+n}-n=\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1}\to\frac{1}{2}$$

(注, $\dfrac{\infty}{\infty}$ の形に変形してもとめた)

演習問題 5.3 次をもとめよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(n^2-2n\right)$

ここで指数関数の微分において重要な次の数列の極限を考える。

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

とすると $\{a_n\}$ は収束する(3)。その極限値を e と定める。

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(a+\frac{1}{n}\right)^n \tag{1}$$

e は無理数であり,

$$e=2.7182818\cdots$$

と近似されることが知られている。また e は

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots \tag{2}$$

と無限級数で表されることを微分の所で学ぶであろう。

数列 (1) は収束が非常に遅く,数列 (2) は非常に早い。このことを演習問題 5.4 を解くことにより実感してほしい。

注:無限級数

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

とは,部分和,$S_0=1, S_1=1+\dfrac{1}{1!}, S_2=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!},\ldots,S_n=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!},\ldots$ で定まる数列 $\{S_n\}$ の極限値を意味する。

(3) このことは「単調増加数列 $\{a_n\}$ の各項がすべてある定数 K より小であるならば数列は収束する」という定理から導かれるがくわしい証明は省く。

演習問題 5.4　電卓等を使って数列 (2) の部分和を S_0 から S_{10} まで計算し，S_n がしだいに e に近づくことをたしかめよ。また $a_{10}=\left(1+\dfrac{1}{10}\right)^{10}$, $a_{100}=\left(1+\dfrac{1}{100}\right)^{100}$, $a_{1000}=\left(1+\dfrac{1}{1000}\right)^{1000}$ の値と比較せよ。

例 5.7 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\to e\cdot 1=1\quad(n\to\infty)$$

演習問題 5.5　次をもとめよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$

5.2　関数の極限

変数 x が a に (a と異なる値をとりながら) 限りなく近づくとき，関数 $f(x)$ の値がある数 A に限りなく近づくとする。このとき

$$\lim_{n\to a}f(x)=A$$

と書き，$x\to a$ のとき $f(x)$ は A に**収束する**という[(1)]。また A を $x\to a$ としたときの $f(x)$ の**極限値**という。

$x\to a$ のとき $f(x)$ の値が $\pm\infty$ となるとき $\pm\infty$ は数ではないが

$$\lim_{x\to a}f(x)=\pm\infty$$

と書くのは数列の場合と同様である。

変数 x が $x>a$ を満たしながら a に限りなく近づくとき，関数 $f(x)$ の値がある数 A に限りなく近づくとする。このとき

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=A$$

と書き，$x\to a+0$ のとき $f(x)$ は A に**収束する**という。また A を $x\to a+0$ としたときの $f(x)$ の**右側極限値**という。

変数 x が $x<a$ を満たしながら a に限りなく近づくとき，関数 $f(x)$ の値がある数 A に限りなく近づくとする。このとき

$$\lim_{x\to a-0}f(x)=A$$

と書き，$x\to a-0$ のとき $f(x)$ は A に**収束する**という。また A を $x\to a-0$ としたときの $f(x)$ の**左側極限値**という。極限値が存在する必要十分条件は右極限値及び左極限値が存在し，その値が一致することである。$a=0$ のとき $x\to 0+0$ を $x\to +0$ と $x\to 0-0$ を $x\to -0$ と略記することもある。

変数 x が限りなく大きくなるとき，関数 $f(x)$ の値がある数 A に限りなく近づくとする。このとき

$$\lim_{n\to\infty}f(x)=A$$

[(1)] これは直感的説明であり厳密な定義ではない。厳密には次に述べる「ε-δ 論法」と呼ばれる方法で定義される。この講義ではこの論法に深入りはしない。関数 f が次を満たすとき「$x\to a$ のとき $f(x)$ は A に収束する」といい，$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=A$ と書く；
任意の正の実数 ε に対しある正の実数 δ が存在して，任意の実数 x に対し $0<|x-a|<\delta\Longrightarrow|f(x)-A|<\varepsilon$ が成立する。

と書き，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は A に**収束する**という[(2)]。

変数 x が限りなく小さくなるとき，関数 $f(x)$ の値がある数 A に限りなく近づくとする。このとき

$$\lim_{n \to -\infty} f(x) = A$$

と書き，$x \to -\infty$ のとき $f(x)$ は A に**収束する**という。

例 5.8 関数の極限に関するいくつかの例：

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 1}(x^2+3) = 4$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \sin x = 0$

(3)
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3$$

(4) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} 2^x = \infty$

数列の場合と同様に次の定理が成立する。

定理 5.9 $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = A$，$\displaystyle\lim_{x \to a} g(x) = B$ とする (A, B は有限値)。

(1) $\displaystyle\lim_{x \to a} \Big(kf(x)\Big) = k \lim_{x \to a} f(x) = kA$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to a} \Big(f(x) \pm g(x)\Big) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = A \pm B$

(3) $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x) = AB$

(4) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{A}{B}$ (ただし $B \neq 0$ とする)

「証明」は数列の場合と同様である。数列の場合と同様に次の定理が成立する。

定理 5.10 [**はさみうちの定理**] a の回りで定義された関数 $f(x), g(x), h(x)$ に対し a の回りで

$$g(x) \leqq f(x) \leqq h(x)$$

が成立しているとする。$\displaystyle\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = A$ のとき $f(x)$ も収束し，

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

が成立する。

$x \to a$ のとき $f(x), g(x) \to 0$ あるいは $f(x), g(x) \to \pm\infty$ となる場合 $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ を考えよう。数列の場合と同様に形式的には $\dfrac{0}{0}$ あるいは $\dfrac{\infty}{\infty}$ で不定であるが，有限値に収束している場合もある。例 5.8 (3) はその例になっている。微分の所で「ロピタルの定理」を扱う。この定理は不定形の極限を計算する強力な手段となる。

---

(2) これは直感的説明であり厳密な定義ではない。厳密には次に述べる「ε-N 論法」と呼ばれる方法で定義される。この講義ではこの論法に深入りはしない。関数 f が次を満たすとき「$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は A に収束する」といい，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x) = A$ と書く；任意の正の実数 ε に対しある正の実数 N が存在して，任意の実数 x に対し $x > N \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ が成立する。

ここで三角関数と指数関数の微分の基礎となる 2 つの極限値をもとめよう。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \quad (\text{変数 } x \text{ はラジアンとする}) \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1 \tag{2}$$

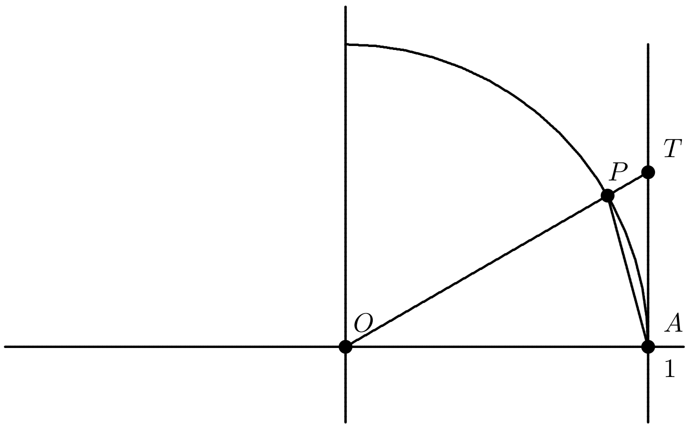

図 5.1

(1) **の証明：**　$x > 0$ とする。図 5.1 より

$$\triangle OPA \text{ の面積} < \text{扇形 } OPA \text{ の面積} < \triangle OTA \text{ の面積}$$

である。それぞれの面積を計算すると

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\tan x$$

これより分母の 2 をはらい，逆数をとれば

$$\frac{\cos x}{\sin x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$$

よって

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

が成立する。$x \to +0$ のとき $\cos x \to 1$ なので $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x} = 1$ が成立する。

$x < 0$ のとき $t = -x$ とおくと $x \to -0$ のとき $t \to +0$ である。

$$\lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{t\to +0}\frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t\to +0}\frac{-\sin t}{-t} = \lim_{t\to +0}\frac{\sin t}{t} = 1$$

以上により (1) の成立が示される。

演習問題 5.6　(1) より次を示せ。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

(2) **の証明：**　3 段階にわけて考える。

第 1 段階：$\displaystyle\lim_{t\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$ である。

$t\to\infty$ の場合；$n\leqq t<n+1$ となる自然数 n をとる，$1+\dfrac{1}{n+1}<1+\dfrac{1}{t}\leqq 1+\dfrac{1}{n}$ より

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{t}\right)^t<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

となる。

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\to e \qquad (n\to\infty)$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}\to e \qquad (n\to\infty)$$

だから $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$

$t\to-\infty$ の場合；$u=-t$ とおく。$(u\to+\infty)$

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=\left(1-\frac{1}{u}\right)^{-u}=\left(\frac{u-1}{u}\right)^{-u}&=\left(1+\frac{1}{u-1}\right)^u\\&=\left(1+\frac{1}{u-1}\right)^{u-1}\left(1+\frac{1}{u-1}\right)\to e \qquad (u\to\infty)\end{aligned}$$

第 2 段階：$\displaystyle\lim_{u\to0}(1+u)^{\frac{1}{n}}=e$ である。$u=\dfrac{1}{t}$ とおけば第 1 段階よりわかる。

第 3 段階：$x=\log(1+u)$ とおくと $u=e^x-1$ であり $x\to0$ のとき $u\to0$ である。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}&=\lim_{u\to0}\frac{u}{\log(1+u)}=\lim_{u\to0}\frac{1}{\log(1+u)^{\frac{1}{u}}}\\&=\frac{1}{\lim_{u\to0}\log(1+u)^{\frac{1}{u}}}=\frac{1}{\log\lim_{u\to0}(1+u)^{\frac{1}{u}}}\\&=\log e=1\end{aligned}$$

となる。ただし変形の途中で「連続関数 $f(x)$ に対し $\displaystyle\lim_{x\to a}f(X)=f(\lim_{x\to a}X)$ が成立する」という事実を「密輸入」した。このことに関しては解析学 I で学ぶ。