数学序論要綱 #13 　　2007–7–20 　　河野

6　1 変数関数の不定積分

この章では不定積分の基本的な部分を学ぶ。もう少し複雑な不定積分は解析学 I (1 年後期) で，定積分は解析学 II (2 年前期) で学ぶ。

不定積分は微分の逆として定義されるものであるが，定積分は求積法と関係して定義されるものであり，定義としては不定積分とは無関係である。定義としては無関係の両者の関係にニュートン・ライプニッツが独立に気づいたとき微積分学が成立したといえる。この事は解析学 II で定積分の定義のときにもう一度ふれるが，この事をきちんと理解する事が積分の理論的把握のキーポイントである。

6.1　定義と諸性質

関数 $F(x)$ が微分可能で

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

となるとき，$F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数** (*primitive function*) または**不定積分** (*indefinite integral*) といい，

$$\int f(x)dx = F(x)$$

と表す。原始関数は $f(x)$ から一意的に決まるものではない。しかし次の命題から定数分の差しかない事が分かる。

命題 6.1 2 つの関数 $F(x), G(x)$ が $F'(x) = G'(x)$ を満たせばある定数 C が存在して $G(x) = F(x) + C$ が成立する。

例えば $\left(\frac{1}{3}x^3 + C\right)' = x^2$ なので

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

となる。この C を積分定数と呼ぶが，この講義ではなければ混乱する場合を除き通常省略する。またこの章の以下の部分で関数は積分可能であることを仮定し，そのことをいちいち断らないこととする。

命題 6.2 [**積分の線型性**]

(1) $\displaystyle\int \{f(x) + g(x)\}\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

(2) $\displaystyle\int af(x)dx = a\int f(x)dx$

命題 6.3 [**いくつかの関数の不定積分**]

(1) $\displaystyle\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} \quad (a \neq -1)$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \log|x|$

(3) $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x$　　(4) $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x$

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

(5) $\displaystyle\int e^x dx = e^x$ (6) $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$ (8) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$

これらの命題はすべて微分法の対応する公式を積分の言葉に直すと出てくる。例えば $\displaystyle\int \{f(x)+g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ を示すには，$F(x) = \displaystyle\int f(x)dx$，$G(x) = \displaystyle\int g(x)dx$ とおくと，$F'(x) = f(x)$，$G'(x) = g(x)$ である。このとき $(F(x)+G(x))' = F'(x)+G'(x) = f(x)+g(x)$ より $\displaystyle\int \{f(x)+g(x)\}dx = F(x)+G(x) = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ が得られる。

$a \neq -1$ のとき $\left(\dfrac{1}{a+1}x^{a+1}\right)' = x^a$ なので $\displaystyle\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1}$ を得る。微分法の公式と積分法の公式を丸暗記して混乱する人もいるが，その様な人に対しては (丸暗記を推奨する分けではないが，かりに丸暗記をするとしたら)「微分法の公式だけにして，積分法は微分法から導いたほうがよい」と言っておこう。

演習問題 6.1 命題 6.2 及び命題 6.3 を証明せよ。

6.2 置換積分法と部分積分法

積分の計算は微分の計算に比べ一般に難しい。計算の方法として次の 2 つがある。

定理 6.4 [**置換積分法**] $x = \varphi(t)$ とすると，

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

証明 $\displaystyle\int f(x)dx = F(x)$ のとき $\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$ である。合成関数の微分法により $\dfrac{d}{dt}F(\varphi(t)) = \dfrac{d\varphi(t)}{dt}\dfrac{d}{dx}F(x) = \dfrac{d\varphi(t)}{dt}f(x)$ なので

$$\int f(\varphi(t))\frac{d\varphi(t)}{dt}dt = F(\varphi(t)) = F(x) = \int f(x)dx$$

を得る。▮

置換積分は色々な場合に色々な形の変数変換が考案されている。詳しくは解析学 I で扱うがここでは幾つかの例を見ておこう。

例 6.5 (1) $I = \displaystyle\int \cos(2x+3)dx$ を考える。$t = 2x+3$ と置くと，$\dfrac{dt}{dx} = 2$ なので，$dx = \dfrac{1}{2}dt$ である。よって

$$I = \int \cos t \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int \cos t dt = \frac{1}{2}\sin t = \frac{1}{2}\sin(2x+3)$$

(2) 次に置換積分の特徴的な形として $I = \displaystyle\int u'f(u)dx$ という形の積分をいくつか見よう (ここで u' は x に関する微分を表すものとする)。このときは $u = u(x)$ とおき置換積分を実行する。$\displaystyle\int \frac{u'}{u}dx$ の形を

している不定積分は**対数型**と呼ばれる。$I = \int \frac{x}{1+x^2}dx$ を考える。$t = 1+x^2$ とおくと，$\frac{dt}{dx} = 2x$ なので，$dx = \frac{1}{2x}dt$，よって

$$I = \int \frac{x}{1+x^2}dx = \int \frac{x}{t}\frac{1}{2x}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}\log t = \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

(3) 対数型 2 番目：$I = \int \tan x dx$ を考える。$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ なので $u = \cos x$ とおくと，$\frac{du}{dx} = -\sin x$ より $dx = -\frac{1}{\sin x}du$ である。よって

$$I = -\int \frac{\sin x}{u}\frac{1}{\sin x}du = -\int \frac{1}{u}du = -\log|u| = -\log|\cos x|$$

(4) 最後に非対数型：$I = \int \cos x \sin^n x dx$ を考える。$s = \sin x$ とおくと $\frac{ds}{dx} = \cos x$ なので

$$I = \int \cos x \sin^n x dx = \int \cos x\, s^n \frac{1}{\cos x}ds = \int s^n ds = \frac{1}{n+1}s^{n+1} = \frac{1}{n+1}\sin^{n+1} x$$

置換積分と並んで不定積分の計算に用いられるのが部分積分法である。

定理 6.6 [**部分積分法**]

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

証明　定義より任意の微分可能な関数 $h(x)$ に対し

$$\int h'(x)dx = h(x)$$

が成立している。$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \frac{d}{dx}f(x)g(x) + f(x)\frac{d}{dx}g(x)$ の両辺を積分すると

$$f(x)f(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

を得る。これを移項すると定理が得られる。∎

定理は移項すると

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

の形になる。実際に適応するときは，どちらを微分されたものと考えるかで 2 通り方法がある。次の例は最初は後者，次は前者の形の適応である。

例 6.7 (1)　被積分関数が「$x \times$ (指数関数)」の場合は典型的である。部分積分法により簡単な関数の積分に変えることができる。

$$\int xe^x dx = \int x(e^x)'dx = xe^x - \int (x)'e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$$

(2) $\log x$ は $\bigl(\log x\bigr)' = \dfrac{1}{x}$ なので，(1) の逆に用いられることが多い。

$$\int x\log x dx = \int \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \log x dx = \frac{1}{2}x^2\log x - \int \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2$$

(3) 部分積分を 2 回実行する必要のある次の様な形の積分もある。

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x dx &= \int x^2(e^x)'dx = x^2e^x - \int (x^2)'e^x dx = x^2e^x - \int 2xe^x dx \\ &= x^2e^x - 2\int xe^x dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x\end{aligned}$$

(4) また $1=(x)'$ と考える言わば退化した形で用いられる部分積分もある。

$$\int \log x dx = \int (x)'\log x dx = x\log x - \int x\frac{1}{x}dx = x\log x - x$$

演習問題 6.2　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) x^5+x^3+x　(2) $(2x+5)^{2007}$　(3) e^{-2x}　(4) $\dfrac{1}{x+1}$

(5) $\dfrac{1}{x^2+2x+2}$　(6) $\sin\dfrac{x}{2}$　(7) $x(3x^2+1)^8$　(8) $\dfrac{x}{(1+x^2)^3}$

(9) $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$　(10) xe^{3x}　(11) $x\sin x$　(12) $x^2\cos x$

(13) x^3e^x　(14) $x^3\log x$　(15) $(\log x)^2$　(16) $\arctan x$

(17) $\arcsin x$　(18) $e^x\sin x$　(19) $e^x\cos x$

重要な注意：不定積分において計算は一般に大変であるが，**検算**は簡単である。求めた関数を微分して元の被積分関数になればよい。**必ず検算をする事** !!