数学序論問題解説 #1

河野

演習問題 1.1　次の P_1 から P_7 は命題かどうか調べよ。また命題であるものに対して真偽を確かめよ (微積分の知識を必要とする問題もある)。
(1) P_1 : $1 \geqq 1$
(2) P_2 : 2^{2006} は素数である。
(3) P_3 : 12345 は 3 で割り切れる。
(4) P_4 : 微分可能な関数は連続である。
(5) P_5 : 連続な関数は微分可能である。
(6) P_6 : 数学は難しい。
(7) P_7 : $n = 2$ に対し $x^n + y^n = z^n$ を満たす自然数 x, y, z は存在しない。

真であるか偽であるかが確定しているものが命題であった。正しくても間違っていても，確定していれば命題である。
(1)　P_1 は命題である。$1 \geqq 1$ は正しい。$1 \geqq 1$ は正しくないと解答した学生がいたので少し説明しておく。$a \geqq b$ の定義は「 $a > b$ または $a = b$ 」である。今の場合 $1 > 1$ が偽であり，$1 = 1$ は真である。「偽または真」は真なので $1 \geqq 1$ は正しい命題である。
(2)　P_2 は命題である。2 は $2 \neq 1$ かつ $2 \neq 2^{2006}$ であり，2 は 2^{2006} を割りきる。よって 2^{2006} は素数ではない。P_2 は間違った命題である。
(3)　P_3 は正しい命題である。
(4)　理由は解析学 I で学ぶが，P_4 は正しい命題である。
(5)　$y = f(x) = |x|$ は連続だが，$x = 0$ で微分可能ではない。よって P_5 は間違った命題である。
(6)　多くの人には正しい命題と思われるかもしれないが，P_6 は命題でない。
(7)　$3^2 + 4^2 = 5^2$ なので P_7 は間違った命題である。

演習問題 1.2　真理表を書くことにより命題 1.1 を証明せよ。

(6) はすでに解説してあるので，それ以外について述べる。

(1)　真理表は

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
T	F	T
F	T	F

となる。P と $\neg(\neg P)$ の対応する欄は同じなので 2 つは同値である。

(2)

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T
T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

となる。$P \wedge (Q \vee R)$ と $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ の対応する欄は同じなので 2 つは同値である。

(3)

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$P \vee Q$	$P \vee R$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

となる。$P \vee (Q \wedge R)$ と $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ の対応する欄は同じなので 2 つは同値である。

(4)

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

となる。$\neg(P \wedge Q)$ と $(\neg P) \vee (\neg Q)$ の対応する欄は同じなので 2 つは同値である。

(5)

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

となる。$\neg(P \vee Q)$ と $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ の対応する欄は同じなので 2 つは同値である。

(7) $\neg(P \Longrightarrow Q) \equiv \neg(\neg P \vee Q) \equiv \neg(\neg P) \wedge (\neg Q) \equiv P \wedge \neg Q$

(8) (6) より $P \Longrightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$ である。同様に $\neg Q \Longrightarrow \neg P \equiv \neg(\neg Q) \vee \neg P \equiv Q \vee \neg P$ となる。明示的には言ってはいなかったが $P \vee Q \equiv Q \vee P$(これを交換法則と呼ぶ) なので $\neg P \vee Q \equiv Q \vee \neg P$ なので (8) が示される。

ここで (7),(8) は真理表を用いなかったが，用いても勿論できる (各自試みよ)。

演習問題 ***1.3** [1]論理における双対原理を証明せよ。

[1]星印 ($*$) が付いている演習問題は全員が解く事を要求していない。興味のあるもののみを対象と考えている問題である。

ここではこの問題の解説は行わない。興味のある人は直接私に質問してください。説明します。

演習問題 1.4　次の命題 (?) 対偶命題をつくれ。
(1) 彼は怒られないと勉強しない。
(2) 数学系科目は勉強しないと合格しない。

(1)　単純に対偶を作ると「勉強するなら怒られる」となる。勉強している時点と怒られた時点の時間の関係を考えると怒られた方が過去であることに注意して，時間の逆転も考慮に入れると,「彼が勉強していれば，その前に必ず怒られている」となる。
(2)　これも単純に対偶を作ると,「合格するなら，勉強する」となるが，時間の逆転に注意すると,「合格した人は勉強した人」となる。