数学序論問題解説 #2

河野

演習問題 1.5　次において P は Q の「必要十分条件，必要条件ではあるが十分条件ではない，十分条件ではあるが必要条件ではない，必要条件でも十分条件でもない」のいずれかであるか決定せよ。ここで x, y は実数とする。

(1) $P : x^2 = 1,\quad Q : x = 1$
(2) $P : xy > 0,\quad Q : x > 0$ かつ $y > 0$
(3) $P : xy > 0,\quad Q : x > 0$ または $y > 0$
(4) $P : xy = 0,\quad Q : x = 0$ かつ $y = 0$
(5) $P : xy = 0,\quad Q : x = 0$ または $y = 0$
(6) $P : xy = 0$ かつ $y = x + 1,\quad Q : x = 0$ かつ $y = 1$
(7) $P : x^2 + 2x - 1 = 0$ かつ $x > 0,\quad Q : x = -1 + \sqrt{2}$

(1)　$Q \Longrightarrow P$ は正しい。$P \Longrightarrow Q$ は $x = -1$ という反例があるので正しくない。よって P は Q であるための必要条件である。
(2)　$Q \Longrightarrow P$ は正しい。$P \Longrightarrow Q$ は $x = -1$ かつ $y = -1$ という反例があるので正しくない。よって P は Q であるための必要条件である。
(3)　$P \Longrightarrow Q$ は $x = -1$ かつ $y = -1$ という反例があるので正しくない。$Q \Longrightarrow P$ は $x = 1$ かつ $y = -1$ という反例があるので正しくない。よって P は必要条件でも十分条件でもない。
(4)　$Q \Longrightarrow P$ は正しい。$P \Longrightarrow Q$ は $x = 0$ かつ $y = 1$ という反例があるので正しくない。よって P は必要条件である。
(5)　積の性質から P は Q の必要十分条件である。
(6)　$Q \Longrightarrow P$ は正しい。$P \Longrightarrow Q$ は $x = -1$ かつ $y = 0$ という反例があるので正しくない。よって P は必要条件である。
(7)　$-1+\sqrt{2} > 0$ かつ $(-1+\sqrt{2})^2+2(-1+\sqrt{2})-1 = 0$ なので $Q \Longrightarrow P$ は正しい。$x^2+2x-1 = 0$ の必要十分条件は $x = -1 + \sqrt{2}$ または $x = -1 - \sqrt{2}$ である。このなかで正の数は $-1 + \sqrt{2}$ のみである。よって $P \Longrightarrow Q$ は正しい。P は必要十分条件である。

演習問題 1.6　次の連立方程式の解を求めよ。

(1) $x(x^2 + y^2) = 0$ かつ $y(x^2 + y^2 - 1) = 0$
(2) $x^3 - x + y = 0$ かつ $y^3 + x - y = 0$
(3) $(y - 2x^2y)2^{-x^2-y^2} = 0$ かつ $(x - 2xy^2)2^{-x^2-y^2} = 0$

(1)　$x(x^2+y^2) = 0$ である必要十分条件は $x = 0$ または $x^2+y^2 = 0$ である。$x^2+y^2 = 0$ である必要十分条件は $(x, y) = (0, 0)$ である。よって $x(x^2+y^2) = 0$ である必要十分条件は $x = 0$ または $(x, y) = (0, 0)$ であるが，これは $x = 0$ と同値である。
　$\vee$, $\Longleftrightarrow$ 等の記号を用いた方が分かりやすいかもしれないので，上のことを記号を用いて書いておく。

$$
\begin{aligned}
x(x^2+y^2) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (x = 0) \vee (x^2+y^2) = 0 \\
x^2+y^2 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (x, y) = (0, 0)
\end{aligned}
$$

なので

$$(x=0) \vee (x^2+y^2)=0 \iff (x=0) \vee (x,y)=(0,0) \iff x=0$$

となる。

よって与えられた連立方程式は連立方程式 $x=0$ かつ $y(x^2+y^2-1)=0$ と同値である。$x=0$ を 2 番目の式に代入すると $y(y^2-1)=0$ となり，$y=0$ または $y=1$ または $y=-1$ となる。よって求める解は $(x,y)=(0,0)$ または $(x,y)=(0,1)$ または $(x,y)=(0,-1)$ である。

(2)　$x^3-x+y=0$ を 1 式，$y^3+x-y=0$ を 2 式とする。1 式と 2 式を加えると $x^3+y^3=0$ を得る。$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=0$ なので

$$x^3+y^3=0 \iff x+y=0 \text{ または } x^2-xy+y^2=0$$

が成立している。

$$x^2-xy+y^2=\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2$$

なので

$$x^2-xy+y^2=0 \iff x-\frac{1}{2}y=0 \text{ かつ } y=0 \iff x=0 \text{ かつ } y=0$$

となる。よって

$$x+y=0 \text{ または } x^2-xy+y^2=0 \iff x+y=0 \text{ または } (x,y)=(0,0) \iff x+y=0$$

が成立するので

$$x^3+y^3=0 \iff x+y=0$$

が分かる。この式を 3 式とすると

$$1 \text{ 式かつ } 2 \text{ 式} \iff 1 \text{ 式かつ } 3 \text{ 式}$$

が成立するので，1 式と 3 式からなる連立方程式を解けばよいことが分かる。3 式を 1 式に代入することにより $x^3-2=0$ が得られる。$x^3-2x=x(x^2-2)=x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$ なので $x=0,\sqrt{2},-\sqrt{2}$ となる。よって解は $(x,y)=(0,0),(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ である。

(3)　指数関数は 0 になることはないので連立方程式は $y-2x^2y=0$ (1 式) かつ $x-2xy^2=0$ (2 式) と考えることができる。

$$\begin{aligned} y-2x^2y=y(1-2x^2)=0 &\iff y=0 \text{ または } 1-2x^2=0 \\ x-2xy^2=x(1-2y^2)=0 &\iff x=0 \text{ または } 1-2y^2=0 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} 1 \text{ 式かつ } 2 \text{ 式} \iff\ & (1)\ x=0 \text{ かつ } y=0\text{，または} \\ & (2)\ x=0 \text{ かつ } 1-2x^2=0\text{，または} \\ & (3)\ 1-2y^2=0 \text{ かつ } y=0\text{，または} \\ & (4)\ 1-2y^2=0 \text{ かつ } 1-2x^2=0 \end{aligned}$$

が成立する。(1) のときは $(x,y)=(0,0)$ になる。(2) のときは $x=0$ を $1-2x^2=0$ を代入すると $1=0$ が成立する。これは矛盾なのでこのとき解は存在しない。(3) のとき $y=0$ を $1-$

$2y^2 = 0$ を代入すると $1 = 0$ が成立する。これは矛盾なのでこのとき解は存在しない。(4) のときは $1 - 2x^2 = 0$ より $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$1 - 2y^2 = 0$ より $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる。以上により $(x, y) = (0, 0), \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ を得る。

演習問題 1.7　次の命題の否定命題をつくれ。またもとの命題の真偽を判定せよ。

(1) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $x^2 \geqq 0$

(2) 任意の $x \in \mathbb{C}$ に対し $x^2 \geqq 0$

(3) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $x^4 - x^2 + \dfrac{1}{4} \geqq 0$

(4) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $x^4 - x^2 + \dfrac{1}{5} \geqq 0$

(5) $x \in \mathbb{R}$ が存在して $x^4 - x^2 + \dfrac{1}{5} \leqq 0$

(6) $x \in \mathbb{R}$ が存在して $x - 2x^2 > 0$ かつ $x < 0$

(1)　否定命題は「$x \in \mathbb{R}$ が存在して $x^2 < 0$」である。任意の実数に対し $x^2 \geqq 0$ が成立するので 1.7 (1) は正しい。

(2)　否定命題は「$x \in \mathbb{C}$ が存在して $x^2 < 0$」である。複素数 i は $i^2 = -1 < 0$ なので否定命題は正しい。よって 1.7 (2) は偽である。

(3)　否定命題は「$x \in \mathbb{R}$ が存在して $x^4 - x^2 + \dfrac{1}{4} < 0$」である。$x^4 - x^2 + \dfrac{1}{4} = \left(x^2 - \dfrac{1}{2}\right)^2 \geqq 0$ なので 1.7 (3) は正しい。

(4)　否定命題は「$x \in \mathbb{R}$ が存在して $x^4 - x^2 + \dfrac{1}{5} < 0$」である。$x^4 - x^2 + \dfrac{1}{5} = \left(x^2 - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} = \left(x^2 - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{20}$ が成立する。$x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とすると，$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \dfrac{1}{5} = -\dfrac{1}{20} < 0$ となるので否定命題は正しい。よって 1.7 (4) は偽である。

(5)　否定命題は「任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $x^4 - x^2 + \dfrac{1}{5} > 0$」である。(4) の例は (5) の例にもなっているので，1.7 (5) は正しい。

(6)　否定命題は「任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $x - 2x^2 \leqq 0$ または $x \geqq 0$」である。$x - 2x^2 = x(1 - 2x) > 0 \iff 0 < x < \dfrac{1}{2}$ なので $x - 2x^2 > 0$ かつ $x < 0$ となる実数 x は存在しない。よって 1.7 (6) は偽である。

演習問題 1.8　a, b は与えられた実数とする。

$$\text{任意の } x \in \mathbb{R} \text{ に対し } a < x \Longrightarrow b < x$$

の否定命題をつくれ。またこの命題の意味を考えることにより，a と b がどのような関係にあるとき真になるか考察せよ。

否定命題は「ある実数 x が存在して $a < x$ かつ $x \leqq b$」である。否定命題が正しいとき $a < b$ が成立する。逆に $a < b$ のとき $x = \dfrac{a+b}{2}$ とおくと x は $a < x < b$ を満たす。よって「$a < b$」は否定命題と同値であることが分かる。以上によりもとの命題は「$a < b$」の否定，即ち「$a \geqq b$」と同値であることが分かる。

演習問題 1.9　次の命題の否定命題をつくれ。またもとの命題の真偽を確かめよ。
(1) 任意の $x \in \mathbb{R}$ と任意の $y \in \mathbb{R}$ に対し $x < y$
(2) ある $x \in \mathbb{R}$ とある $y \in \mathbb{R}$ が存在して $x < y$
(3) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対しある $y \in \mathbb{R}$ が存在して $x < y$
(4) ある $x \in \mathbb{R}$ が存在して任意の $y \in \mathbb{R}$ に対し $x < y$
(5) 任意の $x \in \mathbb{R}$ と任意の $y \in \mathbb{R}$ に対し $x^2 + y^2 \geqq 0$
(6) ある $x \in \mathbb{R}$ とある $y \in \mathbb{R}$ が存在して $x^2 + y^2 = 0$

「ある実数が存在して」という場合は「自分で適当に選んで」成立を示せばよい。
(1)　ある実数 x とある実数 y が存在して $x \geqq y$ が成立する。$x = 1$, $y = 0$ を選べば否定命題は成立する。よって元の命題は正しくない。
(2)　任意の実数 x と任意の実数 y に対し $x \geqq y$ が成立する。$x = 0$, $y = 1$ を選べば元の命題が正しいことが分かる。
(3)　ある実数 x が存在して任意の実数 y に対し $x \geqq y$ が成立する。元の命題の真偽を調べてもよいし，否定命題の真偽を調べてもよい。どちらか一方の真偽を調べれば十分であるが，ここでは元の命題及び否定命題の両方の真偽を調べることにする。最初は元の命題 ； 任意の実数 x に対し $y = x + 1$ とおく。このとき $x < y$ が成立するので元の命題は正しい命題であることが分かる。否定命題；背理法で示す。否定命題が正しいとすると実数 x が存在して任意の実数 y に対し $x \geqq y$ が成立する。y は任意なので特に $y = x + 1$ を選ぶと $x \geqq x + 1$ が成立し，両辺から x を引くことで $0 < 1$ が成立するが，これは矛盾である。よって否定命題は正しくない。
(4)　任意の実数 x に対しある実数 y が存在して $x \geqq y$ が成立する。任意の実数 x に対し $y = x$ を選ぶと否定命題の成立が分かる。よって元の命題は正しくない。
(5)　ある実数 x とある実数 y が存在して $x^2 + y^2 < 0$ が成立する。任意の実数 x に対し $x^2 \geqq 0$ が成立する。同様に任意の実数 y に対し $y^2 \geqq 0$ が成立する。よって $x^2 + y^2 \geqq 0$ が成立するので元の命題は正しい。
(6)　任意の実数 x と任意の実数 y に対し $x^2 + y^2 \neq 0$ が成立する。$x = 0$, $y = 0$ を選ぶと $x^2 + y^2 = 0^2 + 0^2 = 0$ で元の命題が正しいことが分かる。