数学序論問題解説 #3

河野

演習問題 2.1

(1) 5 の倍数となるような自然数全体の集合を表せ。

(2) 4 で割ると余りが 3 となるような自然数全体の集合を表せ。

(3) 3 で割ると余りが 2 であり，5 で割ると余りが 3 となるような自然数全体の集合を表せ。

(1) 「$\{5k \mid k \in \mathbb{N}\}$」とのみ書いてある解答も間違いとはいえないが，ここは集合の記号に慣れることが目的なので，詳しく (しつこく) 解答しておく。

$A = \{5k \mid k \in \mathbb{N}\}$，$B = \{x \mid x$ は 5 で割り切れる$, x \in \mathbb{N}\}$ とおくとき $A = B$ であることを示す。

$$A = B \quad \Longleftrightarrow \quad A \subseteq B \quad \wedge \quad B \subseteq A$$

なので $A \subseteq B$ かつ $B \subseteq A$ を示す。最初に $A \subseteq B$ を示す。

$$A \subseteq B \quad \Longleftrightarrow \quad 任意の\ a\ に対し\ a \in A \Longrightarrow a \in B$$

なので任意の a に対し $a \in A$ となっているとする。このときある自然数 k が存在して $a = 5k$ と書ける。$5k$ は自然数 (自然数なので × 自然数は自然数である) $a \in \mathbb{N}$ であるまた $a = 5k\,(k \in \mathbb{N})$ なので a は 5 で割り切れる。よって $a \in B$ となる。よって $A \subseteq B$ が成立する。

次に $B \subseteq A$ を示す。a を B の任意の元とする。a は 5 で割り切れる自然数なのである整数 k が存在して $a = 5k$ と書ける。ここで $k \leqq 0$ とすると $a = 5k \leqq 0$ となり自然数であることに矛盾，よって $k > 0$ である。k は整数なので $k \in \mathbb{N}$ となり，$a \in A$ となる。よって $B \subseteq A$ が成立する。

(2) $A = \{4k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ である。A=$\{4k + 3 \mid k \in \mathbb{N}\}$ は間違い。これでは 3 が A に含まれない。この表示では余りが直接は見にくいので $A = \{4(k-1) + 3 \mid k \in \mathbb{N}\}$ とも書ける。また $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ として $A = \{4k + 3 \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ という書き方もできる。

ここでは $A = \{4k + 3 \mid k \in \mathbb{N}_0\}$，$B = \{x \mid x$ は 3 で割ると余りが 3 である自然数$\}$ とおくとき $A = B$ を示す。a を A の任意の元とするとある $k \in \mathbb{N}_0$ が存在して $a = 4k + 3$ と書ける。よって a は 4 で割ると 3 余る整数である。また $k \geqq 0$ より $4k \geqq 0$，よって $4k + 3 \leqq 3 > 0$ となるので，a は自然数である。よって $a \in B$ となり，$A \subseteq B$ が成立する。

a を B の任意の元とすると，a は 4 で割ると余り 3 なのである整数 k が存在して，$a = 4k + 3$ となる。ここで $k < 0$ とすると $k \leqq -1$ なので $4k \leqq -4$ より $a = 4k + 3 \leqq -4 + 3 = -1 < 0$ となる。これは a が自然数であることに矛盾するので，$k \geqq 0$ であり，$k \in \mathbb{N}_0$ である。よって $a \in A$ となり，$B \subseteq A$ が示された。以上により $A = B$ が成立する。

(3) 3 で割ると余りが 2 である集合と 5 で割ると余りが 3 である集合の共通部分を少し調べてみると，15 で割ると 8 余る集合になっていることが予想される。

$A = \{15k + 8 \mid k \in \mathbb{N}_0\}$，$B = \{x \mid x$ は 3 で割ると余りが 2, x は 5 で割ると余りが $3, x \in \mathbb{N}\}$ とするとき $A = B$ を示す。最初に $A \subseteq B$ を示す。a を A の任意の元とする。$a = 15k + 8\,(k \in \mathbb{N}_0)$ と書かれているので，$a = 3(5k + 2) + 2$ となるので，a は 3 で割る余りは 2 である。また $a = 5(3k + 1) + 3$ と書けるので 5 で割ると余り 3 である。また $k \geqq 0$ より $a = 15k + 8 \geqq 8 > 0$ なので a は自然数である。以上により $a \in B$ が示される。よって $A \subseteq B$ が成立する。

次に $B \subseteq A$ を示す。a を B の任意の元とする。3 で割ると余りが 2 なのである整数 k_1 が存在して $a = 3k_1 + 2$ と書ける。5 で割ると余りが 3 なのである整数 k_2 が存在して $a = 5k_2 + 3$ と書ける。$5k_2 + 3 = 3k_1 + 2$ なので $5k_2 + 1 = 3k_1$ となっている。k_2 を 3 で割った余りを r とすると，$r = 0$ または 1 または 2 であり，ある整数 k_3 を用いて $k_2 = 3k_3 + r$ と書ける。このとき $5(3k_3 + r) + 1 = 15k_3 + 5r + 1$ は 3 で割り切れる。$r = 0$ のときこの数を 3 で割った余りが 1 になるので，$r \neq 0$ である。また $r = 2$ のときこの数を 3 で割った余りは 2 になるので $r \neq 2$ である。$r = 1$ のときは 3 で割り切れるので $r = 1$ であることが分かる。よって $k_2 = 3k_3 + 1$ と書くことができる。

$$a = 5k_2 + 3 = 5(3k_3 + 1) + 3 = 15k_3 + 8$$

となる。$k_3 < 0$ のとき $k_3 \leqq -1$ なので

$$a = 15k_3 + 8 < -15 + 8 = -7 < 0$$

となり a が自然数であることに矛盾，よって $k_3 \geqq 0$ である。よって $a \in A$ であり，$B \subseteq A$ が成立する。よって $A = B$ が示された。ここでの議論を眺めると，書き方という問題もあるが，$\mathbb{N}$ ではなくいっそ $\mathbb{N}_0$ を自然数と定義したほうが議論がすっきりすると思われる。これ以外にも種々の理由があり，$\mathbb{N}_0$ を**自然数**としている本もある。個人的にはその方がすっきりしてよいと考えてはいるが，この講義ではその立場は採用しない。

演習問題 2.2

(1) 例 2.3 の (2) を証明せよ。
(2) $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$ ではないことを上の定義に基づいて証明せよ。
(3) $\mathbb{N} = \mathbb{Z}$ ではないことを上の定義に基づいて証明せよ。

(1)　n を $\{4k \mid k \in \mathbb{N}\}$ の任意の元とすると，ある自然数 k が存在して $n = 4k$ と書ける。このとき $k_1 = 2k$ とおくと $n = 4k = 2 \cdot 2k = 2k_1$ なので $n \in \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ となっている。よって $\{4k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ が成立している。
(2)　$\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$ の定義は $\mathbb{Z}$ の任意の元 a が $\mathbb{N}$ に含まれていることであった。即ち

$$\text{任意の } a \text{ に対し } a \in \mathbb{Z} \Longrightarrow a \in \mathbb{N}$$

である。この命題の否定は

$$\text{ある } a \text{ に対し, } a \in \mathbb{Z} \text{かつ } a \notin \mathbb{N}$$

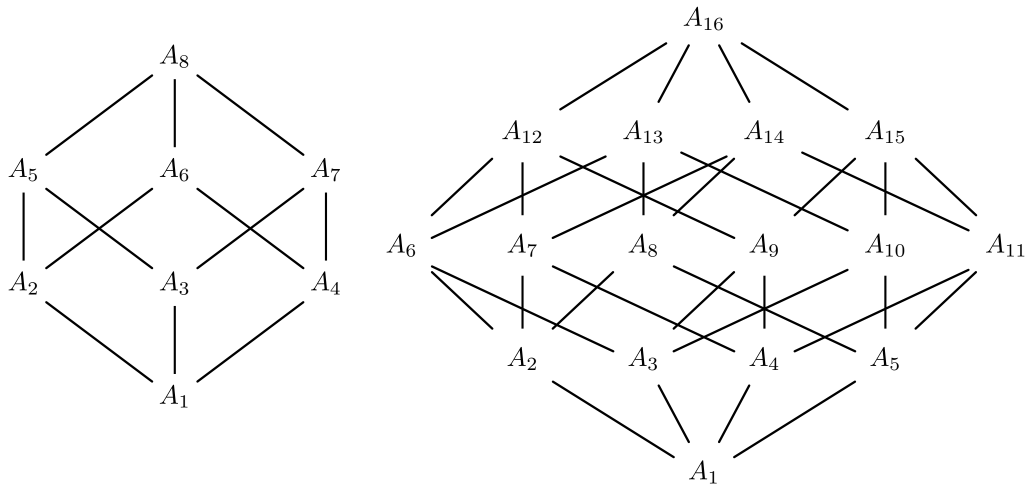
である。a として -1 をとってくると $-1 \in \mathbb{Z}$ かつ $-1 \notin \mathbb{N}$ となっているので，否定命題が証明される。よってもとの $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$ は正しくないことが示された。
(3)　$\mathbb{N} = \mathbb{Z}$ の定義は $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ および $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$ が共に成立することであった。(2) より $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$ が成立しないので，$\mathbb{N} = \mathbb{Z}$ は成立しない。

演習問題 2.3　次の集合 A に対しその部分集合をすべて列挙せよ。またその部分集合の間に成立する包含関係 $(\subseteq, \not\subseteq)$ を調べよ。

(1) $A = \{1, 2, 3\}$　　(2) $A = \{1, 2, 3, 4\}$

(1)　部分集合をすべて列挙すると $A_1 = \{\ \}$,$A_2 = \{1\}$,$A_3 = \{2\}$,$A_4 = \{3\}$,$A_5 = \{1, 2\}$, $A_6 = \{1, 3\}$,$A_7 = \{2, 3\}$,$A_8 = \{1, 2, 3\}$ である。成立する包含関係は $A_1 \subseteq A_2$,$A_1 \subseteq A_3$,$A_1 \subseteq$

A_4,$A_1 \subseteq A_5$, $A_1 \subseteq A_6$,$A_1 \subseteq A_7$,$A_1 \subseteq A_8$, $A_2 \subseteq A_5$,$A_2 \subseteq A_6$,$A_2 \subseteq A_8$, $A_3 \subseteq A_5$,$A_3 \subseteq A_7$,$A_3 \subseteq A_8$, $A_4 \subseteq A_6$,$A_4 \subseteq A_7$,$A_4 \subseteq A_8$, $A_5 \subseteq A_8$,$A_6 \subseteq A_8$,$A_7 \subseteq A_8$ である。これらは $A_i \subsetneq A_j$ も成立している。これらに加え $A_i \subseteq A_i$ $(i = 1, \dots, 8)$ がある。これに関しては $A_i \subsetneq A_i$ は成立しない。上で述べなかった集合同士は $A_i \not\subseteq A_j$ である。これを下図左の様に表すと分かりやすいかもしれない。線は真部分集合の関係になることを表しており，線を下にたどっていけるもののみが真部分集合になっている。



(2)　部分集合をすべて列挙すると $A_1 = \{\ \}$,$A_2 = \{1\}$,$A_3 = \{2\}$,$A_4 = \{3\}$,$A_5 = \{4\}$, $A_6 = \{1,2\}$,$A_7 = \{1,3\}$,$A_8 = \{1,4\}$,$A_9 = \{2,3\}$, $A_{10} = \{2,4\}$,$A_{11} = \{3,4\}$,$A_{12} = \{1,2,3\}$, $A_{13} = \{1,2,4\}$,$A_{14} = \{1,3,4\}$,$A_{15} = \{2,3,4\}$, $A_{16} = \{1,2,3,4\}$ である。部分集合の関係は省略した。前問の様に図右をみれば分かるであろう。

演習問題 2.4　次の A, B,C に関し $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$, $B \cup C$, $A \cap C$, $A \cup C$,$(A \cap B) \cap C$,$(A \cup B) \cup C$ を求めよ。また $A \cap (B \cup C)$,$(A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C)$,$(A \cup B) \cap (A \cup C)$ を求めよ。

(1) $A = \{1,2,3,4\}$,$B = \{1,3,5,6\}$,$C = \{1,2,6,7\}$

(2) $A = \{1,2,3,4,5\}$,$B = \{1,2,3\}$,$C = \{5,6,7\}$

(3) $A = \{1,2,3,4\}$,$B = \{1,3,5\}$,$C = \{\ \}$

(1)　$A \cap B = \{1,3\}$, $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B \cap C = \{1,6\}$, $B \cup C = \{1,2,3,5,6,7\}$, $A \cap C = \{1,2\}$, $A \cup C = \{1,2,3,4,6,7\}$, $(A \cap B) \cap C = \{1\}$, $(A \cup B) \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

　$A \cap (B \cup C) = \{1,2,3,4\} \cap \{1,2,3,5,6,7\} = \{1,2,3\}$, $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1,3\} \cup \{1,2\} = \{1,2,3\}$, $A \cup (B \cap C) = \{1,2,3,4\} \cup \{1,6\} = \{1,2,3,4,6\}$, $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1,2,3,4,5,6\} \cap \{1,2,3,4,6,7\} = \{1,2,3,4,6\}$

(2)　$A \cap B = \{1,2,3\}$, $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$, $B \cap C = \{\ \}$, $B \cup C = \{1,2,3,5,6,7\}$, $A \cap C = \{5\}$, $A \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $(A \cap B) \cap C = \{\ \}$, $(A \cup B) \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

　$A \cap (B \cup C) = \{1,2,3,4,5\} \cap \{1,2,3,5,6,7\} = \{1,2,3,5\}$, $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1,2,3\} \cup \{5\} = \{1,2,3,5\}$, $A \cup (B \cap C) = \{1,2,3,4,5\} \cup \{\ \} = \{1,2,3,4,5\}$, $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1,2,3,4,5\} \cap \{1,2,3,4,5,6,7\} = \{1,2,3,4,5\}$

(3)　$A \cap B = \{1,3\}$, $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$, $B \cap C = \{\ \}$, $B \cup C = \{1,3,5\}$, $A \cap C = \{\ \}$, $A \cup C = \{1,2,3,4\}$, $(A \cap B) \cap C = \{\ \}$, $(A \cup B) \cup C = \{1,2,3,4,5\}$

$A\cap(B\cup C)=\{1,2,3,4\}\cap\{1,3,5\}=\{1,3\}$, $(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{1,3\}\cup\{\ \}=\{1,3\}$, $A\cup(B\cap C)=\{1,2,3,4\}\cup\{\ \}=\{1,2,3,4\}$, $(A\cup B)\cap(A\cup C)=\{1,2,3,4,5\}\cap\{1,2,3,4\}=\{1,2,3,4\}$

演習問題 2.5　A, B, C を集合とする。
(1) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
(2) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
を証明せよ。

[ヒント：] これらは，２つの集合が等しい，ということを示す問題である。２つの集合 A, B が $A=B$ である，ということの定義は,「 $A\subseteq B$ かつ $B\subseteq A$ 」 ということだったので，$A=B$ を示せ，ということは,「 $A\subseteq B$ かつ $B\subseteq A$ 」 を示せ，ということである。

$A\subseteq B$ の定義は,「 A の全ての元が B に含まれる 」 ということだったので，上の問題 (1) について言うならば,

$x\in A\cap(B\cup C)$ ならば $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$ であることを示し，$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$ ならば $x\in A\cap(B\cup C)$ であることを示せば良い，ということになる。

(1)　最初に $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$ を示す。x を $A\cap(B\cup C)$ の任意の元とする。このとき

$$x\in A\quad\wedge\quad x\in B\cup C$$

が成立している。これは

$$x\in A\quad\wedge\quad(x\in B\vee x\in C)$$

と同値である。論理のところで学んだように命題 P,Q,R に対し $P\wedge(Q\vee R)\equiv(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$ が成立する。よって上の命題は

$$(x\in A\wedge x\in B)\quad\vee\quad(x\in A\wedge x\in C)$$

と同値である。$x\in A\wedge x\in B$ は $x\in A\cap B$ と同値であり，$x\in A\wedge x\in C$ は $x\in A\cap C$ と同値なので

$$x\in A\cap B\vee x\in A\cap C$$

と同値である。よって

$$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

が成立することが分かり，$A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$ が成立する。

逆に $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$ ならば $x\in A\cap(B\cup C)$ であることを示す。x を $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ の任意の元とする。このとき

$$x\in A\cap B\quad\vee\quad x\in A\cap C$$

が成立している。上と同様に同値な命題で変形していくと順に

$$(x\in A\wedge x\in B)\quad\vee\quad(x\in A\wedge x\in C)$$

$$x\in A\quad\wedge\quad(x\in B\vee x\in C)$$

$$x\in A\quad\wedge\quad x\in B\cup C$$

となるので $x\in A\cap(B\cup C)$ が成立する。以上により $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ の成立が示される。

(2) (1) と同様に示すことができる。ここでは少し違う証明の仕方を紹介しておく。最初に $x \in A\cup(B\cap C)$ ならば $x \in (A\cup B)\cap(A\cup C)$ であることを示す。x を $A\cup(B\cap C)$ の任意の元とする。このとき

$$x \in A \text{ または } x \in B\cap C$$

が成立している。$A \subseteq A\cup B$ かつ $A \subseteq A\cup C$ なので $A \subseteq (A\cup B)\cap(A\cup C)$ が成立している。$x \in A$ が成立するときは

$$x \in A \subseteq (A\cup B)\cap(A\cup C)$$

より $x \in (A\cup B)\cap(A\cup C)$ が成立する。

$B \subseteq A\cup B$ かつ $C \subseteq A\cup C$ より $B\cap C \subseteq (A\cup B)\cap(A\cup C)$ が成立する。$x \in B\cap C$ が成立するときは

$$x \in B\cap C \subseteq (A\cup B)\cap(A\cup C)$$

より $x \in (A\cup B)\cap(A\cup C)$ が成立する。いずれの場合も成立するので，成立が示された。

次に $x \in (A\cup B)\cap(A\cup C)$ ならば $x \in A\cup(B\cap C)$ であることを示す。x を $(A\cup B)\cap(A\cup C)$ の任意の元とする。このとき

$$x \in A\cup B \text{ かつ } x \in A\cup C$$

が成立している。(a) $x \in A$ の場合と (b) $a \notin A$ の場合に分ける。

(a) の場合は $A \subseteq A\cup(B\cap C)$ より $x \in A\cup(B\cap C)$ が成立する。

(b) の場合 $x \in A\cup B$ かつ $x \notin A$ なので $x \in B$ が成立している。また $x \in A\cup C$ かつ $x \notin A$ なので $x \in C$ が成立している。よって $x \in B\cap C$ である。$B\cap C \subseteq A\cup(B\cap C)$ なので $x \in A\cup(B\cap C)$ が成立する。

いずれの場合も成立しているので，成立が示された。

演習問題 2.6　演習問題 2.4 の集合 A, B に対し $A-B$, A^c, $A\times B$ を求めよ。ただしここで全体集合は $X=\{1,2,\ldots,7\}$ とする。

(1) $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{1,3,5,6\}$ なので，$A-B=\{2,4\}$，$A^c=\{5,6,7\}$，$A\times B=\{(1,1),(1,3),(1,5),(1,6),(2,1),(2,3),(2,5),(2,6),(3,1),(3,3),(3,5),(3,6),(4,1),(4,3),(4,5),(4,6)\}$

(2) $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{1,2,3\}$ なので，$A-B=\{4,5\}$，$A^c=\{6,7\}$，$A\times B=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3)\}$

(3) $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{1,3,5\}$ なので，$A-B=\{2,4\}$，$A^c=\{5,6,7\}$，$A\times B=\{(1,1),(1,3),(1,5),(2,1),(2,3),(2,5),(3,1),(3,3),(3,5),(4,1),(4,3),(4,5)\}$

演習問題 2.7　X を全体集合とし A と B をその部分集合とするとき，次を証明せよ。

(1) $B \subseteq A \iff B^c \supseteq A^c$

(2) De Morgan の法則

$$\begin{aligned}(A\cup B)^c &= A^c\cap B^c\\ (A\cap B)^c &= A^c\cup B^c\end{aligned}$$

(1) $A^c=\{x\in X \mid x\notin A\}$，$B^c=\{x\in X \mid x\notin B\}$ である。$B\subseteq A$ が成立しているとすると，

$$\text{任意の } x \text{ に対し } x\in B \Longrightarrow x\in A$$

が成立している。条件の部分の対偶は $x \notin A \Longrightarrow x \notin B$ なので上の命題は

$$\text{任意の } x \text{ に対し } x \notin A \Longrightarrow x \notin B$$

と同値である。これは $A^c \subseteq B^c$ を意味している。

$B^c \supseteq A^c$ が成立しているとすると，

$$\text{任意の } x \text{ に対し } x \notin A \Longrightarrow x \notin B$$

が成立している。条件の部分の対偶をとると

$$\text{任意の } x \text{ に対し } x \in B \Longrightarrow x \in A$$

となる。よって $B \subseteq A$ が成立する。

(2)　最初に $(A{\cup}B)^c = A^c{\cap}B^c$ を示す。そのためには $(A{\cup}B)^c \subseteq A^c{\cap}B^c$ および $(A{\cup}B)^x \supseteq A^c{\cap}B^c$ を示せばよい。

x を $(A \cup B)^c$ の任意の元とすると

$$x \notin A \cup B$$

が成立している。$x \in A$ とすると $x \in A \cup B$ となるので $x \notin A$ である。よって $x \in A^c$ が成立する。また $x \in B$ とすると $x \in A \cup B$ となるので $x \notin B$ である。よって $x \in B^c$ が成立する。よって $x \in A^c \cap B^c$ となる。以上で $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$ が示された。

x を $A^c \cap B^c$ の任意の元とすると

$$x \notin A \text{ かつ } x \notin B$$

が成立している。$x \in A \cup B$ とすると $x \in A$ または $x \in B$ が成立するが，上より共に成立しない。よって $x \notin A \cup B$ なので $x \in (A \cup B)^c$ となる。以上で $(A \cup B)^x \supseteq A^c \cap B^c$ が示された。

次に $(A{\cap}B)^c = A^c{\cup}B^c$ を示す。上で述べた様な証明もできるが，ここでは上の結果を用いる証明をすることにする。A，B に対し $C = A^c$，$D = B^c$ とおき，C，D に対し上の結果を適用する。

$$(C \cup D)^c = C^c \cap D^c$$

が成立している。この両者の補集合をとると $((C \cup D)^c)^c = C \cup D$ であることに注意すると

$$(C \cup D) = (C^c \cap D^c)^c$$

となる。$C^c = (A^c)^c = A$，$D^c = (B^c)^c = B$ を用いると

$$A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$$

となる。これが求めるべきものであった。