数学序論問題解説 #4

河野

演習問題 2.8 以下の (1)~(9) の写像について，

(a) 単射であるが全射ではない。
(b) 全射であるが単射ではない。
(c) 単射でも全射でもない。
(d) 全単射である。

のどれに相当するのかを判定せよ。

(1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = e^x$ と決める。
(2) $f : (\,0,\,\infty\,) \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = e^x$ と決める。
(3) $f : \mathbb{R} \longrightarrow (\,0,\,\infty\,)$ を $f(x) = e^x$ と決める。
(4) $f : (\,0,\,\infty\,) \longrightarrow (\,0,\,\infty\,)$ を $f(x) = e^x$ と決める。
(5) $f : (\,0,\,\infty\,) \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = \log x$ と決める。
(6) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = \cos x$ と決める。
(7) $f : \mathbb{R} \longrightarrow [\,-1,\,1\,]$ を $f(x) = \cos x$ と決める。
(8) $f : [\,0,\,\pi\,] \longrightarrow [\,-1,\,1\,]$ を $f(x) = \cos x$ と決める。
(9) $f : [\,0,\,\pi\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = \cos x$ と決める。

写像が実数上の関数の場合単調増加または単調減少であれば単射になる。以下ではこのことを用いるのでここで証明しておく。単調増加とは「任意の $x_1, x_2 \in X$ に対し $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ が成立する」ことであり，単調減少とは「任意の $x_1, x_2 \in X$ に対し $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ が成立する」ことであった。

(1) $f : X \longrightarrow Y$ が単調増加のとき単射である。

x_1, x_2 を X の任意の元とする。$x_1 \neq x_2$ とすると (a) $x_1 < x_2$ または (b) $x_1 > x_2$ のどちらかが成立する。(a) の場合 $f(x_1) < f(x_2)$ が成立し，(b) の場合 $f(x_1) > f(x_2)$ が成立する。いずれの場合も $f(x_1) \neq f(x_2)$ なので単射が証明される。

(2) $f : X \longrightarrow Y$ が単調減少のとき単射である。

x_1, x_2 を X の任意の元とする。$x_1 \neq x_2$ とすると (a) $x_1 < x_2$ または (b) $x_1 > x_2$ のどちらかが成立する。(a) の場合 $f(x_1) > f(x_2)$ が成立し，(b) の場合 $f(x_1) < f(x_2)$ が成立する。いずれの場合も $f(x_1) \neq f(x_2)$ なので単射が証明される。 ▮

ここで単射，全射の否定命題も述べておく。写像 $f : X \longrightarrow Y$ が単射であることの定義は「任意の $x_1, x_2 \in X$ に対し $x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$ となる」だったので，否定は「ある $x_1, x_2 \in X$ が存在して $x_1 \neq x_2$ かつ $f(x_1) = f(x_2)$ が成立する」である。写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全射であることの定義は「任意の $y \in Y$ に対し X の元 x が存在して $y = f(x)$ が成立する」だったので，否定は「ある $y \in Y$ が存在して任意の $x \in X$ に対し $y \neq f(x)$ が成立する」である。

(1) e (自然対数の底) は $e > 1$ なので $y = e^x$ は単調増加である。よって f は単射である。

任意の実数 x に対し $e^x > 0$ が成立する。-1 に対し $e^x = -1$ となる実数 x は存在しないので全射ではない。以上により (a) である。

(2) 単射であることは (1) と同様に示すことができる。全射でないことも (1) と同様に示すことができる。以上により (a) である。

(3) 単射であることは (1) と同様に示すことができる。グラフの様子よりこの場合は全射であることは分かると思う。証明には「任意の $y>0$ に対し $y=e^x$ となる実数 x が存在する」ことを示す必要がある。この事実に関しては「解析学 I」で簡単にふれるが，ここではこの事実の成立を前提とする。以上により (d) であることが分かる。

(4) 単射であることは (1) と同様に示すことができる。定義域は $(\,0,\,\infty\,)$ なので，x が定義域のとき $e^x>1$ である。$\dfrac{1}{2}\in(\,0,\,\infty\,)$ であるが，$e^x=\dfrac{1}{2}$ となる $x\in(\,0,\,\infty\,)$ は存在しない。よって全射ではない。以上により (a) である。

(5) $y=\log x$ は単調増加なので f は単射である。任意の $y\in\mathbb{R}$ に対し $x=e^y$ とおくと $\log x=\log e^y=y$ となるので f は全射である。以上により (d) である。

(6) 例えば $\cos 0=1=\cos 2\pi$ なので単射ではない。また任意の実数 x に対し $-1\leqq\cos x\leqq 1$ なので全射ではない。以上により (c) である。

(7) 単射でないのは (6) と同様に示すことができる。任意の $y\in[\,-1,\,1\,]$ に対し $y=\cos x$ となる $x\in\mathbb{R}$ は存在するので全射である。以上により (b) である。

(8) $[\,0,\,\pi\,]$ に制限すると $\cos x$ が単調減少 ($\forall x,x'\in\mathbb{R}$ に対し $x<x'\Longrightarrow\cos x>\cos x'$) なので単射である。全射であるのは (7) と同様に示すことができる。以上により (d) である。

(9) 単射は (8) と同様に示すことができる。全射でないことは (6) と同様に示すことができる。以上により (a) である。

演習問題 2.9　$f:A\longrightarrow B,\ g:B\longrightarrow C$ とする。

(1) f と g が単射ならば，$g\circ f:A\to C$ も単射であることを証明せよ。

(2) f と g が全射ならば，$g\circ f:A\to C$ も全射であることを証明せよ。

ヒント：単射と全射の定義が満たされることを示せば良い。

(1) x_1,x_2 を A の任意の元とする。$(g\circ f)(x_1)=(f\circ g)(x_2)\Longrightarrow x_1=x_2$ を証明すれば $g\circ f$ が単射であることが示される。$(g\circ f)(x)=g(f(x))$ なので $(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)$ が成立しているとすると，$g(f(x_1))=g(f(x_2))$ が成立する。g は単射なので $f(x_1)=f(x_2)$ が得られる。更に f が単射なので $x_1=x_2$ となり $g\circ f$ が単射であることが分かる。

(2) 任意の $z\in C$ に対し元 $x\in A$ が存在して $z=(g\circ f)(x)$ が成立することを示せばよい。z を C の任意の元とする。g は全射なので $y\in B$ が存在して $z=g(y)$ が成立する。f は全射なので y に対し $x\in A$ が存在して $y=f(x)$ が成立する。以上により $x\in A$ が見つかった。このとき $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(y)=z$ となる。よって $g\circ f$ は全射であることが分かる。

演習問題 2.10　X,Y を集合とし，$f:X\longrightarrow Y$ とする。$A,\,B$ を X の部分集合とする。

(1) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$ を証明せよ。

(2) $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$ を証明せよ。

(3) $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$ とはならない例を挙げよ。

ヒント： (1), (2) については，問題 2.5 のヒントを参照。(3) については，そういう例を作れば良い。

ここで $f(A)$ の定義をもう一度書いておく。$f:X\longrightarrow Y$ と $A\subseteq X$ に対し

$$f(A)=\{\,y\mid \text{ある } x\in X \text{ が存在して } y=f(x)\,\}$$

であった，A という元を f で写したものでないことに注意。

(1) 最初に $f(A\cup B)\subseteq f(A)\cup f(B)$ の成立を示す。y を $f(A\cup B)$ の任意の元とする。$f(A\cup B)$ の定義から (ここが分からない人は $f(A)$ の定義をもう一度確認してきちんと理解すること)，元 $x\in A\cup B$ が存在して $y=f(x)$ となる。$x\in A$ の場合 $y\in f(A)$ となる (しつこいようだが分からない人は $f(A)$ の定義の確認を)。$f(A)\subseteq f(A)\cup f(B)$ より $y\in f(A)\cup f(B)$ が成立する。$x\in B$ の場合 $y\in f(B)$ となる ($(\text{しつこい})^2$ ようだが分からない人は $f(A)$ の定義の確認を)。$f(B)\subseteq f(A)\cup f(B)$ より $y\in f(A)\cup f(B)$ が成立する。いずれの場合も $y\in f(A)\cup f(B)$ となるので $f(A\cup B)\subseteq f(A)\cup f(B)$ が成立する。

次に $f(A\cup B)\supseteq f(A)\cup f(B)$ の成立を示す。y を $f(A)\cup f(B)$ の任意の元とする。$y\in f(A)$ の場合は $f(A)\subseteq f(A\cup B)$ より $y\in f(A\cup B)$ が成立する。$y\in f(B)$ の場合は $f(B)\subseteq f(A\cup B)$ より $y\in f(A\cup B)$ が成立する。いずれの場合も $y\in f(A\cup B)$ となるので $f(A)\cup f(B)\subseteq f(A\cup B)$ が成立する。以上により $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$ が成立する。

(2) y を $f(A\cap B)$ の任意の元とする。このとき $x\in A\cap B$ が存在して $y=f(x)$ となる。$A\cap B\subseteq A$ より $x\in A$ となる。よって $y\in f(A)$ が成立する。$A\cap B\subseteq B$ より $x\in B$ となる。よって $y\in f(B)$ が成立する。よって $y\in f(A)\cap f(B)$ となるので $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$ が成立する。

(3) 等号が成立しない状況を分析することで例を作れる。例えば $A\cap B=\emptyset$ だが $f(A)\cap f(B)\neq\emptyset$ のような例を作れば等号が成立しない例になる。$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ を $f(x)=x^2$ で定義する。$A=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\}$，$B=\{x\in\mathbb{R}\mid x<0\}$ とすると $A\cap B=\emptyset$ なので $f(A\cap B)=\emptyset$ である。$f(A)=\{y\in\mathbb{R}\mid y>0\}$，$f(B)=\{y\in\mathbb{R}\mid y>0\}$ なので $f(A)\cap f(B)=\{y\in\mathbb{R}\mid y>0\}$ となる。この例の場合 $f(A\cap B)\subsetneq f(A)\cap f(B)$ となっている。