数学序論問題解説 #6

河野

演習問題 3.5　次の複素数の極形式を求めよ。

(1) $1+i\sqrt{3}$　(2) -2　(3) i　(4) $2\sqrt{3}-2i$　(5) $1-\sqrt{3}i$

(1)　$|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$ なので

$$1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

と書ける。$2\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)$ と表してもよい。

(2)　$|-2| = \sqrt{(-2)^2+0^2} = 2$ なので

$$-2 = 2\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = 2e^{i\pi}$$

となる。

(3)　$|i| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$ なので

$$i = \cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2} = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)$$

となる。ここで $\exp(x) = e^x$ という記法を用いた。

(4)　$|2\sqrt{3}-2i| = \sqrt{12+4} = 4$ なので

$$2\sqrt{3}-2i = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4\exp\left(-i\frac{\pi}{6}\right)$$

となる。偏角をマイナスで選んだが $\frac{11\pi}{6}$ としてもよい。

(5)　$|1-\sqrt{3}i| = 2$ なので

$$1-\sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\exp\left(-i\frac{\pi}{3}\right)$$

となる。偏角をマイナスで選んだが $\frac{5\pi}{3}$ としてもよい。

演習問題 3.6　次の問いに答えよ。

(1) $e^{i\theta}$ は，原点を中心とする半径 1 の円上の点であることを示せ。

(2) オイラーの公式を用いて次の等式を導け。

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

(1)　$|e^{i\theta}| = |\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta} = \sqrt{1} = 1$ なので原点を中心とする半径 1 の円周上にある。

(2) $\cos(-\theta) = \cos\theta,\ \sin(-\theta) = -\sin\theta$ より

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$$

となるので,

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta, \quad e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$$

となる。これから (2) の式を得る。

演習問題 3.7　次の問いに答えよ。

(1) $(e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}$ を示せ。

(2) 系 3.6 を証明せよ。

(1)

$$(e^{i\theta})^{-1} = \frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta}e^{-i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta-i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{e^0} = e^{-i\theta}$$

(2)　n に関する数学的帰納法で証明する。$n=1$ のとき示すべき式は $(e^{i\theta})^1 = e^{i1\theta}$ なので成立している。$n=k$ のとき成立を仮定する; 即ち $(e^{i\theta})^k = e^{ik\theta}$ が成立していると仮定する。

$$(e^{i\theta})^{k+1} = (e^{i\theta})^k e^{i\theta} = e^{ik\theta}e^{i\theta} = e^{ik\theta+i\theta} = e^{i(k+1)\theta}$$

となり $n = k+1$ の成立が示された。よってすべての自然数に対し成立している。

演習問題 3.8　次の点を極形式で表し図示せよ。

(1) $\alpha = 2+2i$　　(2) $\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$　　(3) $\alpha\beta$　　(4) $\dfrac{\beta}{\alpha}$

(1)　$|\alpha| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$ なので

$$\alpha = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)$$

である。

(2)　$|\beta| = \sqrt{\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}} = 1$ なので

$$\beta = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \exp\left(i\frac{\pi}{6}\right)$$

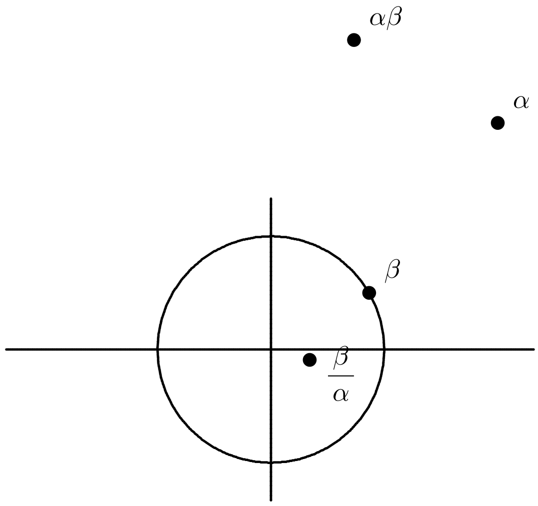
である。

(3)

$$\alpha\beta = 2\sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}\exp i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}\exp\left(i\frac{5\pi}{12}\right)$$

(4)

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{\alpha} &= \frac{\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right)}{2\sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right)\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\exp i\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\exp\left(-i\frac{\pi}{12}\right)\end{aligned}$$



演習問題 3.9

(1) 1 の 3 乗根を具体的に求め，複素平面に図示せよ。

(2) 1 の 5 乗根を求め，複素平面に図示せよ。

(1) 1 の 3 乗根は $x^3 = 1$ の解なので

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) = 0$$

より $x = 1$ または $x^2 + x + 1 = 0$ を満たす。$x^2 + x + 1 = 0$ のとき

$$x = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

なので $1, \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ が求めるものである。$\omega = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ とおくと $\omega^2 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ なので図の様になる。

(2) 1 の 5 乗根は $x^5 = 1$ の解なので

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1) = 0$$

より $x = 1$ または $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ を満たす。$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ のとき両辺を x^2 で割ると $x^2 + x + 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 0$ となる。$t = x + \dfrac{1}{x}$ とおくと $t^2 = x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2}$ なので t は 2 次方程式

$$t^2 + t - 1 = 0$$

の解である。これを解くと $t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ が得られる。$t = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ のとき

$$x + \frac{1}{x} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

を解くと

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \quad x = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

が得られる。$t = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ のとき

$$x + \frac{1}{x} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

を解くと

$$x = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \quad x = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

が得られる。よって

$$1, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}+i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}-i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-1-\sqrt{5}}{4}+i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-1-\sqrt{5}}{4}-i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

か求める解である。

$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ とおくと

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{-1-\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \\ \alpha^3 &= \frac{-1-\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \\ \alpha^4 &= \frac{-1+\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \end{aligned}$$

なので図の様になる。