数学序論問題解説 #9

河野

演習問題 4.7

(1)　a, b, c を正の実数とする。$a^b = c^{b\log_c a}$ を示せ。

(2)　a, b, c を正の実数とする。$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ を示せ。

対数関数においては次が基本的である。

$$y = \log_a x \Longleftrightarrow x = a^y$$

(1)　$X = c^{b\log_c a}$ とおくと $b\log_c a = \log_c X$ となる。ここで $b\log_c a = \log_c a^b$ なので

$$\log_c a^b = \log_c X$$

となる。$\log_c$ は単射なので $a^b = X$ となり式が証明される。

(2)　最初に底の変換公式を導く。$X = \log_c a$，$Y = \log_a b$ とおくと $a = c^X$，$b = a^Y$ が成立しているので

$$b = a^Y = \left(c^X\right)^Y = c^{XY}$$

となるので $XY = \log_c b$ となる。即ち

$$\log_c a \log_a b = \log_c b$$

が成立している。この式は

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

という形でも用いられる。

$X = a^{\log_c b}$ とおくと $\log_c b = \log_a X$ である。底の変換を用いると $\log_c b = \dfrac{\log_c X}{\log_c a}$ 即ち

$$\log_c a \log_c b = \log_c X$$

となる。$Y = b^{\log_c a}$ とおくと $\log_c a = \log_b Y$ である。底の変換を用いると $\log_c a = \dfrac{\log_c Y}{\log_c b}$ 即ち

$$\log_c a \log_c b = \log_c Y$$

となる。よって $\log_c X = \log_c Y$ であるが単射より $X = Y$ が成立する。

演習問題 4.8

(1)　次の値を求めよ。

$$\arcsin\frac{1}{2},\quad \arccos\frac{1}{2},\quad \arctan 1,\quad \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \arctan\sqrt{3},\quad \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(2) $-1 \leqq x \leqq 1$ の時，$\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(3) $x > 0$ の時，$\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(4) $\arctan x = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ を示せ。

逆三角関数においては次が基本的である。

$$y = \arcsin x \iff x = \sin y \qquad (-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2})$$

$$y = \arccos x \iff x = \cos y \qquad (0 \leqq y \leqq \pi)$$

$$y = \arctan x \iff x = \tan y \qquad (-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$$

(1) $x = \arcsin \dfrac{1}{2}$ とおくと

$$\frac{1}{2} = \sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

なので $x = \dfrac{\pi}{6}$，即ち $\arcsin \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$ となる。

$x = \arccos \dfrac{1}{2}$ とおくと

$$\frac{1}{2} = \cos x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

なので $x = \dfrac{\pi}{3}$，即ち $\arccos \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}$ となる。

$x = \arctan 1$ とおくと

$$1 = \tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

なので $x = \dfrac{\pi}{4}$，即ち $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$ となる。

$x = \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とおくと

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

なので $x = \dfrac{\pi}{4}$，即ち $\arcsin \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{4}$ となる。

$x = \arctan \sqrt{3}$ とおくと

$$\sqrt{3} = \tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

なので $x = \dfrac{\pi}{3}$，即ち $\arctan \sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$ となる。

$x = \arctan \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とおくと

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

なので $x = \dfrac{\pi}{6}$，即ち $\arctan \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$ となる。

(2) $u = \arcsin x$ とおくと $x = \sin u$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq u \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ であり，$v = \arccos x$ とおくと $x = \cos v$ $(0 \leqq v \leqq \pi)$ である。演習問題 5.3 (1) を用いると

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \sin\left(-\left(v - \frac{\pi}{2}\right)\right) = -\sin\left(v - \frac{\pi}{2}\right) = -\big(-\cos v\big) = \cos v$$

の成立が示される。$0 \leqq v \leqq \pi$ のとき $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \dfrac{\pi}{2} - v \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であり，$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - v\right) = \cos v = x = \sin u$ なので $\dfrac{\pi}{2} - v = u$ となり，$u + v = \dfrac{\pi}{2}$ となる。

(3) $u = \arctan x$ とおくと $x = \tan u$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}\right)$ である。$x > 0$ より $0 < u < \dfrac{\pi}{2}$ となっている。$v = \arctan \dfrac{1}{x}$ とおくと $\dfrac{1}{x} = \tan v$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < v < \dfrac{\pi}{2}\right)$ である。$\dfrac{1}{x} > 0$ より $0 < v < \dfrac{\pi}{2}$ となっている。演習問題 4.3 (1) を用いると

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \cos\left(-\left(v - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(v - \frac{\pi}{2}\right) = \sin v$$

の成立が示される。これより

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - v\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - v\right)} = \frac{\cos v}{\sin v} = \frac{1}{\tan v} = x = \tan u$$

が成立する。u, v ともに $0 < u < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < v < \dfrac{\pi}{2}$ なので $0 < \dfrac{\pi}{2} - v < \dfrac{\pi}{2}$ となり，$\dfrac{\pi}{2} - v = u$ が成立する。

(4) $u = \arctan x$ とおくと $x = \tan u$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}\right)$ であり，$v = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ とおくと $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \sin v$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq v \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ となる。

$$1 + x^2 = 1 + \tan^2 u = 1 + \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u} = \frac{\cos^2 u}{\cos^2 u} + \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u} = \frac{1}{\cos^2 u}$$

であるが，$-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos u > 0$ なので $\sqrt{1+x^2} = \dfrac{1}{\cos u}$ となる。

$$\sin v = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \cos u \tan u = \sin u$$

であり，$-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq v \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $u = v$ となる。

演習問題 4.9　次を示せ。

(1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(2) $\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$

(3) $\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b$

(1) $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$，$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ なので

$$\cosh^2 x = \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}$$
$$\sinh^2 x = \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$$

なので

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{4}{4} = 1$$

が成立する。

(2)

$$\begin{aligned}\cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b &= \frac{e^a + e^{-a}}{2}\frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^a - e^{-a}}{2}\frac{e^b - e^{-b}}{2} \\ &= \frac{e^{a+b} + e^{-a+b} + e^{a-b} + e^{-a-b}}{4} + \frac{e^{a+b} - a^{-a+b} - e^{a-b} + e^{-a-b}}{4} \\ &= \frac{e^{a+b} + e^{-(a+b)}}{2} = \cosh(a+b)\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b &= \frac{e^a - e^{-a}}{2}\frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^a + e^{-a}}{2}\frac{e^b - e^{-b}}{2} \\ &= \frac{e^{a+b} - e^{-a+b} + e^{a-b} - e^{-a-b}}{4} + \frac{e^{a+b} + e^{-a+b} - e^{a-b} - e^{-a-b}}{4} \\ &= \frac{e^{(a+b)} - e^{-(a+b)}}{2} = \sinh(a+b)\end{aligned}$$

演習問題 4.10

(1)　$\cosh x$ を $[\,0, \infty\,)$ に制限した関数の逆関数を $\cosh^{-1} x$ とする。これは $[\,1, \infty\,)$ から $[\,0, \infty\,)$ への関数である。

$$\cosh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

であることを示せ。

(2)　$\sinh x$ の逆関数を $\sinh^{-1} x$ とする。これは $\mathbb{R}$ 全体で定義された関数である。

$$\sinh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

であることを示せ。

(3)　$\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ とする。任意の x に対して $|\tanh x| < 1$ を示せ。

(4)　$\tanh x$ は単調増加関数であることを (微分を使わずに) 示せ。

(1)　$y = \cosh^{-1} x$ とおくと $x = \cosh y$ $(y \geqq 0)$ である。このとき $x \geqq 1$ が成立している。$Y = e^y$ とおくと $Y \geqq 1$ となっている。

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{Y + \dfrac{1}{Y}}{2}$$

より

$$Y^2 - 2xY + 1 = 0$$

が成立している。2 次方程式の解の公式より

$$Y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

となる。$Y = x - \sqrt{x^2-1}$ が成立しているとすると，$Y \geqq 1$ より $x - \sqrt{x^2-1} \geqq 1$ となり，

$$x - 1 \geqq \sqrt{x^2-1}$$

が成立している。両辺を 2 乗すると $1 \leqq x$ を得るが $x \geqq 1$ より $x = 1$ となる。このときは $x + \sqrt{x^2-1} = x - \sqrt{x^2-1}$ となるので，$Y = x + \sqrt{x^2-1}$ のときのみ考えればよい。以上の考察により

$$y = \log Y = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

となる。

(2) $y = \sinh^{-1} x$ とおくと $x = \sinh y$ である。$Y = e^y$ とおくと $Y > 0$ である。

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{Y - \dfrac{1}{Y}}{2}$$

より

$$Y^2 - 2xY - 1 = 0$$

が成立している。2 次方程式の解の公式より

$$Y = x \pm \sqrt{x^2+1}$$

となる。$Y = x - \sqrt{x^2+1}$ が成立しているとすると，$Y \leqq 0$ より矛盾，よって $Y = x + \sqrt{x^2+1}$ となる。

$$y = \log Y = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

となる。

(3) $X = e^x$ とおくと $X > 0$ である。

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{X - \dfrac{1}{X}}{X + \dfrac{1}{X}} = \frac{X^2-1}{X^2+1} = \frac{X^2+1-2}{X^2+1} = 1 - \frac{2}{X^2+1}$$

となる。$X^2 > 0$ より $X^2 + 1 > 1$ であり，

$$0 < \frac{1}{X^2+1} < 1$$

となる。

$$0 > -\frac{2}{X^2+1} > -2$$

の両辺に 1 を加えると $1 > 1 - \dfrac{2}{X^2+1} > -1$ となる。

(4) 最初に $y = f(X) = \dfrac{2}{X^2+1}$ は $X > 0$ で単調減少であることを注意しておく。即ち $0 < X_1 < X_2$ ならば $f(X_1) > f(X_2)$ が成立している。x_1, x_2 を $x_1 < x_2$ を満たす任意の実数とする。このとき $X_1 = e^{x_1}$，$X_2 = e^{x_2}$ とおくと $y = e^x$ は単調増加なので $X_1 < X_2$ が成立している。よって $f(X_1) > f(X_2)$ となり，$-f(X_1) < -f(X_2)$ となる。これに 1 を加えると

$$1 - \frac{2}{X_1^2+1} < 1 - \frac{2}{X_2^2+1}$$

となり $\tanh x_1 < \tanh x_2$ となる。よって $\tanh x$ は単調増加である。