数学序論問題解説 #10

河野

演習問題 5.1　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n-1}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2+n+1}$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n+1}}{n+2}$　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n-1}$

(1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{3-\frac{1}{n}} = \frac{2}{3}$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

(3)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n+1}}{n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\sqrt{n^2+3n+1}}{1+\frac{2}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{2}{n}} = 1$$

(4)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3^n}2^n}{1-\frac{1}{3^n}} \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3^n}} = 0$$

演習問題 5.2　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{2^n} = 0$ を示せ。

(ヒント) $a_n = \dfrac{n^3}{2^n}$ とする。n を十分大きくすれば $\dfrac{1}{2} < r < 1$ となる適当な r を選んで $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < r$ とできる。

きちんと議論するには ε–N 論法が必要であるが，ここでは直感的な説明に留める。

$bn = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ とおく。

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{(n+1)^3}{n^3} = \frac{1}{2}$$

となっている。よって十分大きな n に対し b_n はその極限値 $\dfrac{1}{2}$ に近い。$\dfrac{1}{2} < r < 1$ となる r に対し $b_n < r$ となっている。よって十分大きな自然数 N を選べば N 以上の大きい自然数 n に対し $b_n < r$ が成立している。N 以上の自然数 n に対し

$$a_{n+1} < ra_n$$

が成立している。
　よって

$$a_n \quad < \quad ra_{n-1} < r^2a_{n-2} < \cdots < r^{n-N}a_N$$

が成立する。即ち

$$0 < a_n < r^{n-N}a_N$$

が成立している。$\lim_{n\to\infty} 0 = 0 = \lim_{n\to\infty} r^{n-N}a_N$ なのではさみうちの定理より $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成立する。

演習問題 5.3　次をもとめよ。

(1) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$　　(2) $\lim_{n\to\infty} \left(n^2 - 2n\right)$

(1)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} = 0
\end{aligned}$$

(2)

$$\left(n^2 - 2n\right) \quad = \quad (n-1)^2 - 1$$

なので収束せず $\lim_{n\to\infty} \left(n^2 - 2n\right) = \infty$ となる。

演習問題 5.4　電卓等を使って数列 (2) の部分和を S_0 から S_{10} まで計算し，S_n がしだいに e に近づくことをたしかめよ。また $a_{10} = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10}$, $a_{100} = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100}$, $a_{1000} = \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000}$ の値と比較せよ。

　これはすでに講義のときやっているので省略する。講義のときは関数電卓で計算したが，関数電卓自身の誤差には注意しなかった。厳密には計算機による誤差にも注意しながら計算を実行する必要がある。マスマティカやメイプルなどの数式処理ソフトを使うと誤差なしに計算が実行できる。プログラム言語のライブラリ等を用いても同様のことはできる。また自分自身でそのようなプログラムを書くことも可能である。興味のあるものは各自試みることを期待します。

演習問題 5.5　次をもとめよ。

(1) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n$　　(2) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$

(1)

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)} \\
&= e\cdot 1 = e
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} &= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^2
\end{aligned}
$$

演習問題 5.6　(1) より次を示せ。

$$
\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x(\cos x+1)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x(\cos x+1)} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+1} \\
&= -1\cdot\frac{0}{2}=0
\end{aligned}
$$