

演習問題 5.7 $x = a$ で微分可能な関数は $x = a$ において連続であることを証明せよ。

関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとすると,

$$\varepsilon(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$$

とおくとき $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ が成立している。このとき

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \varepsilon(h)h$$

なので $x = a+h$ とおくと

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \{f(a) + f'(a)h + \varepsilon(h)h\} = f(a)$$

となるので $f(x)$ は $x = a$ で連続である。

演習問題 5.8 定義に基づいて次の関数の導関数を求めよ。

(1) $f(x) = x$

(2) $f(x) = x^3$

(3) $f(x) = x^2 + x + 1$

(4) $f(x) = a$

(5) $f(x) = x^4$

(6) $f(x) = \frac{1}{x}$

(1)

$$(x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

(2)

$$\begin{aligned} (x^3)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \{3x^2 + 3xh + h^2\} = 3x^2 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} (x^2 + x + 1)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + (x+h) + 1 - (x^2 + x + 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h + 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \{2x + h + 1\} = 2x + 1 \end{aligned}$$

(4)

$$(a)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a - a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

(5)

$$\begin{aligned}(x^4)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \{4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3\} \\ &= 4x^3\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x}\right)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{x - (x+h)}{(x+h)x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(x+h)x} \\ &= -\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

演習問題 5.9 テキストを参考にして，定理 5.12, 5.13, 5.14 を証明せよ。

定理 5.12 はすでに証明してあるので，他を証明する。

最初に定理 5.13 の証明。次が成立することを注意しておく。

$$f(x+h) - f(x) = q(x)h + \varepsilon(h)h$$

であり， $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ のとき $f(x)$ は微分可能であり， $f'(x) = q(x)$ が成立する。

$y = f(x)$, $z = g(y)$ は微分可能なので

$$\begin{aligned}f(x+h) - f(x) &= f'(x)h + \varepsilon_1(h)h \\ g(y+k) - g(y) &= g'(y)k + \varepsilon_2(k)k\end{aligned}$$

としたとき $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_1(h) = 0$, $\lim_{k \rightarrow 0} \varepsilon_2(k) = 0$ が成立している。 $f(x+h) - f(x) = k$ とおくと $\lim_{h \rightarrow 0} k = 0$ である。

$$\begin{aligned}g \circ f(x+h) - g \circ f(x) &= g(f(x+h)) - g(f(x)) \\ &= g(f(x) + k) - g(f(x)) \\ &= g'(y)k + \varepsilon_2(k)k \\ &= g'(y)(f(x+h) - f(x)) + \varepsilon_2(k)(f(x+h) - f(x)) \\ &= g'(y)(f'(x)h + \varepsilon_1(h)h) + \varepsilon_2(k)(f'(x)h + \varepsilon_1(h)h) \\ &= g'(y)f'(x)h + \left(g'(y)\varepsilon_1(h) + \varepsilon_2(k)f'(x) + \varepsilon_2(k)\varepsilon_1(h)\right)h\end{aligned}$$

$\varepsilon(h) = g'(y)\varepsilon_1(h) + \varepsilon_2(k)f'(x) + \varepsilon_2(k)\varepsilon_1(h)$ とおくと

$$g \circ f(x+h) - g \circ f(x) = g'(y)f'(x)h + \varepsilon(h)h$$

となり, $h \rightarrow 0$ のとき $\lim_{h \rightarrow 0} k = 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_1(h) = 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_2(k) = 0$ となるので

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

となる。最初の注意より $g \circ f(x)$ は微分可能で, 導関数は $g'(y)f'(x)$ となる。よって

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$$

が成立する。

次に定理 5.14 を証明する。関数 f と f の逆関数 f^{-1} を合成した関数は恒等写像である。即ち $f^{-1} \circ f(x) = x$ となる。 $\frac{dx}{dx} = 1$ なので, 定理 5.13 を適用すると,

$$1 = \frac{dx}{dy} \frac{dy}{dx}$$

となる。これより

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

を得る。

演習問題 5.10 任意の自然数 n に対して $(x^n)' = nx^{n-1}$ が成立する事を数学的帰納法で示せ。

$n = 1$ のとき場合を考える。

$$(x^1)' = x' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1 = 1x^0$$

よって $n = 1$ のとき成立している。

$n = k$ のとき成立を仮定する。即ち $(x^k)' = kx^{k-1}$ の成立を仮定する。積の微分法を用いると

$$\begin{aligned} (x^{k+1})' &= (x^k \cdot x)' = (x^k)'x + x^k x' \\ &= kx^{k-1}x + x^k \cdot 1 = kx^k + x^k \\ &= (k+1)x^{k+1-1} \end{aligned}$$

よって $n = k + 1$ のときの成立が示された。数学的帰納法によりすべての n で成立する。

演習問題 5.11 次の有理関数の導関数を求めよ。

(1) $y = \frac{x-1}{x+1}$

(2) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

(3) $y = \frac{1}{x^2+1}$

(1)

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x-1}{x+1} \right)' = \frac{(x-1)'(x+1) - (x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x+1 - (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

(2) (1) と同様に解いてもよいし, $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 1 + 2}{x^2 - 1} = 1 + \frac{2}{x^2 - 1}$ と変形して

$$y' = \left(1 + \frac{2}{x^2 - 1}\right)' = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

という計算法もある。

(3)

$$y' = \left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)' = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$$

演習問題 5.12 n を自然数, m を整数とする。 $u = x^{\frac{1}{n}}$, $y = u^m$ とおく。合成関数の導関数 (定理 5.13) を用いて関数 $y = x^{\frac{m}{n}}$ の導関数を求め, その導関数が $y' = (x^{\frac{m}{n}})' = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n} - 1}$ の形をしていることを確かめよ。

$$\frac{dy}{du} = mu^{m-1}, \frac{du}{dx} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = mu^{m-1} \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1} \\ &= \frac{m}{n} (x^{\frac{1}{n}})^{m-1} x^{\frac{1}{n} - 1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - 1} \\ &= \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n} - 1} \end{aligned}$$

となるので成立が確かめられる。

演習問題 5.13 次の関数の導関数を定義に基づいて求めよ。ただし次の極限值は用いてよい。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

(1) $y = x^3$

(2) $y = \frac{x + 1}{x^2 + 1}$

(3) $y = \cos 2x$

(4) $y = \log x$

(1)

$$\begin{aligned} (x^3)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{x+h+1}{(x+h)^2+1}\right) - \left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{(x+h+1)(x^2+1) - (x+1)((x+h)^2+1)}{((x+h)^2+1)(x^2+1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-x^2 - 2x + 1 - xh - h)}{h((x+h)^2+1)(x^2+1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-x^2 - 2x + 1 - xh - h}{((x+h)^2+1)(x^2+1)} = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(\cos 2x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos 2(x+h) - \cos 2x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos 2x \cos 2h - \sin 2x \sin 2h - \cos 2x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \cos 2x \frac{\cos 2h - 1}{h} - \sin 2x \frac{\sin 2h}{h} \right\} \\ &= \cos 2x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos 2h - 1}{h} - \sin 2x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h}{h}\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\frac{\cos 2h - 1}{h} = \frac{(\cos 2h - 1)(\cos 2h + 1)}{h(\cos 2h + 1)} = \frac{-\sin^2 2h}{h(\cos 2h + 1)}$$

なので

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos 2h - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 2h}{h(\cos 2h + 1)} \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} 2 \frac{\sin 2h}{2h} \frac{\sin 2h}{\cos 2h + 1} \\ &= -2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h}{2h} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h}{\cos 2h + 1} \\ &= -2 \cdot 1 \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

であり、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 \frac{\sin 2h}{2h} = 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h}{2h} = 2 \cdot 1 = 2$$

なので

$$(\cos 2x)' = -2 \sin 2x$$

となる。

(4)

$$(\log x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h}$$

であるが、ここで $k = \log(x+h) - \log x$ とおくと $h \rightarrow 0$ のとき $k \rightarrow 0$ となる。

$$\log(x+h) - \log x = \log \frac{x+h}{x}$$

なので $\log \frac{x+h}{x} = k$ より $e^k = \frac{x+h}{x}$ を得る。これを h について解くと

$$h = x(e^k - 1)$$

となる。これを代入して次を得る。

$$\begin{aligned}(\log x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{x(e^k - 1)} \\ &= \frac{1}{x} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{e^k - 1} = \frac{1}{x}\end{aligned}$$

演習問題 5.14 次の関数の導関数を求めよ (諸公式を用いてよい)。

(1) $x^2 + 3x + 2$

(2) $3 \sin x + 2e^x$

(3) $y = xe^x$

(4) $y = \sin^{100} 2x$

(5) $y = x^3 \log(2x^3 + x)$

(6) $y = \arcsin(x^2 + 1)$

(7) $(x^2 + 2)(x^2 + 3)$

(8) $\sin(3x + 1)$

(9) $e^x \sin x$

(10) $y = x^x$

(1)

$$(x^2 + 3x + 2)' = 2x + 3$$

(2)

$$(3 \sin x + 2e^x)' = 3 \cos x + 2e^x$$

(3)

$$(xe^x)' = e^x + xe^x$$

(4)

$$(\sin^{100} 2x)' = 200 \sin^{99} 2x \cos 2x$$

(5)

$$(x^3 \log(2x^3 + x))' = 2x^2 \log(2x^3 + x) + x^3 \frac{6x^2 + 1}{2x^3 + x}$$

(6)

$$(\arcsin(x^2 + 1))' = \frac{2x}{\sqrt{1 - (x^2 + 1)^2}}$$

(7)

$$\begin{aligned} ((x^2 + 2)(x^2 + 3))' &= (x^2 + 2)'(x^2 + 3) + (x^2 + 2)(x^2 + 3)' \\ &= 2x(x^2 + 3) + 2x(x^2 + 2) = 2x(2x^2 + 5) \end{aligned}$$

(8)

$$(\sin(3x + 1))' = 3 \cos(3x + 1)$$

(9)

$$(e^x \sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x$$

(10) これは本来なら演習問題 5.17 で出すべき問題でした。両辺の対数をとると

$$\log y = \log x^x = x \log x$$

なので両辺を x で微分すると

$$\frac{dy}{dx} \frac{1}{y} = \log x + x \frac{1}{x} = \log x + 1$$

となる。よって

$$(x^x)' = x^x(\log x + 1)$$

である。

演習問題 5.15 次を示せ。

$$y = \log|x| \quad (x \neq 0) \quad \text{とおくと} \quad y' = \frac{1}{x}$$

$x > 0$ のときはすでに示したように

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

が成立する。

$x < 0$ のとき, $|x| = -x$ なので, $u = -x$ とおき合成関数の微分法を用いる。

$$\begin{aligned} (\log|x|)' &= \frac{d \log(-x)}{dx} = \frac{d \log u}{du} \frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{u}(-1) = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

いずれの場合も

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x}$$

が成立する。

演習問題 5.16 次を示せ。

$$\left\{ x \arctan x - \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) \right\}' = \arctan x$$

$$(x \arctan x)' = \arctan x + \frac{x}{1+x^2}$$

$$\left(\frac{1}{2} \log(x^2 + 1) \right)' = \frac{x}{x^2 + 1}$$

から命題が示される。

演習問題 5.17 対数微分法をもちいて次の微分をもとめよ。

(1) $x^{\sin x}$

(2) $\sqrt{\frac{(x^2 + 2)^2}{(x^2 + 3)^3}}$

(1) $y = x^{\sin x}$ の両辺の対数を取ると, $\log y = \log x^{\sin x} = \sin x \log x$ である。この両辺を x で微分すると

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \cos x \log x + \sin x \frac{1}{x}$$

なので

$$\frac{dy}{dx} = x^{\sin x} \left(\cos x \log x + \sin x \frac{1}{x} \right)$$

が得られる。

(2) $y = \sqrt{\frac{(x^2 + 2)^2}{(x^2 + 3)^3}}$ の両辺の対数を取ると,

$$\begin{aligned} \log y &= \log \sqrt{\frac{(x^2 + 2)^2}{(x^2 + 3)^3}} = \log \left(\frac{(x^2 + 2)^2}{(x^2 + 3)^3} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{(x^2 + 2)^2}{(x^2 + 3)^3} = \frac{1}{2} \{ \log(x^2 + 2)^2 - \log(x^2 + 3)^3 \} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \log(x^2 + 2) - \frac{1}{2} \cdot 3 \log(x^2 + 3) = \log(x^2 + 2) - \frac{3}{2} \log(x^2 + 3) \end{aligned}$$

である。この両辺を x で微分すると

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2 + 2} - \frac{3}{2} \frac{2x}{x^2 + 3}$$

なので

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \sqrt{\frac{(x^2 + 2)^2}{(x^2 + 3)^3}} \left(\frac{2x}{x^2 + 2} - \frac{3x}{x^2 + 3} \right) \\ &= \frac{2x}{(x^2 + 3)\sqrt{x^2 + 3}} - \frac{3x(x^2 + 2)}{(x^2 + 3)^2\sqrt{x^2 + 3}} \end{aligned}$$

が得られる。