数学序論問題解説 #13

河野

演習問題 6.1　命題 6.2 及び命題 6.3 を証明せよ。

命題 6.2 (1) はすでに示してあるので (2) を示す。$F'(x) = f(x)$ とおくと $F(x) = \displaystyle\int f(x)dx$ である。$(aF(x))' = aF'(x) = af(x)$ なので

$$\int af(x)dx = aF(x) = a\int f(x)dx$$

となる。

命題 6.3 は微分法で学んだ関数の導関数と積分の定義から出てくる。即ち

$$\int f(x)dx = F(x)$$

を示すためには

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

を示せばよい。

(1) は要綱に書いてある。(2) は講義でも説明したし，演習問題 5.15 を参考にしてもよい。(3)–(8) はそれぞれ $(\sin x)' = \cos x$，$(-\cos x)' = \sin x$，$(e^x)' = e^x$，$\left(\dfrac{a^x}{\log a}\right)' = \dfrac{1}{\log a}\log a\, a^x = a^x$，$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ から結論が得られる。

演習問題 6.2　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $x^5 + x^3 + x$	(2) $(2x+5)^{2007}$	(3) e^{-2x}	(4) $\dfrac{1}{x+1}$
(5) $\dfrac{1}{x^2+2x+2}$	(6) $\sin\dfrac{x}{2}$	(7) $x(3x^2+1)^8$	(8) $\dfrac{x}{(1+x^2)^3}$
(9) $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$	(10) xe^{3x}	(11) $x\sin x$	(12) $x^2\cos x$
(13) x^3e^x	(14) $x^3\log x$	(15) $(\log x)^2$	(16) $\arctan x$
(17) $\arcsin x$	(18) $e^x\sin x$	(19) $e^x\cos x$	

(1)　積分の加法性を使う。

$$\begin{aligned}\int \left\{x^5 + x^3 + x\right\} dx &= \int x^5dx + \int x^3dx + \int xdx \\ &= \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2\end{aligned}$$

(2) 置換積分法を使う。$t = 2x + 5$ と置くと $\dfrac{dt}{dx} = 2$ より $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{\frac{dt}{dx}} = \dfrac{1}{2}$ となる。よって

$$\begin{aligned}\int (2x+5)^{2007} dx &= \int t^{2007} \frac{dx}{dt} dt = \int t^{2007} \frac{1}{2} dt \\ &= \frac{1}{2 \cdot 2008} t^{2008} = \frac{1}{40016} (2x+5)^{2008}\end{aligned}$$

(3) $t = -2x$ とおくと $\dfrac{dt}{dx} = -2$ より $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{\frac{dt}{dx}} = -\dfrac{1}{2}$ となる。よって

$$\begin{aligned}\int e^{-2x} dx &= \int e^t \frac{dx}{dt} dt = -\frac{1}{2} \int e^t dt \\ &= -\frac{1}{2} e^t = -\frac{1}{2} e^{-2x}\end{aligned}$$

(4) $t = x + 1$ とおくと $\dfrac{dt}{dx} = 1$ より $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{\frac{dt}{dx}} = 1$ となる。よって

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x+1} dx &= \int \frac{1}{t} dt \\ &= \log |t| = \log |x+1|\end{aligned}$$

(5) $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$ となるので $t = x + 1$ とおくと

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{1}{t^2+1} dt$$

となる。ここで命題 6.3 (8) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$ を用いる方法もあるが，ここではそれを用いない解答を紹介しておく。$t = \tan\theta$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{dt}{d\theta} &= \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)' = \frac{(\sin\theta)'\cos\theta - \sin\theta(\cos\theta)'}{\cos^2\theta} \\ &= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 1 + t^2\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{t^2+1} dt &= \int \frac{1}{t^2+1} \frac{dt}{d\theta} d\theta = \int \frac{1}{t^2+1} (t^2+1) d\theta \\ &= \int d\theta = \theta\end{aligned}$$

となる。$t = \tan\theta$ より $\theta = \arctan t$ なので

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+2x+1} dx &= \int \frac{1}{t^2+1} dt \\ &= \theta = \arctan t = \arctan(x+1)\end{aligned}$$

となる。

x^2+a^2 という部分がある積分の場合 $x=a\tan t$ とおくことで積分が計算できる場合がある。これに関しては後期に解析学 I で学ぶ。

(6) $t=\dfrac{x}{2}$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{2}$ より $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\frac{dt}{dx}}=2$ となる。よって

$$\int \sin\frac{x}{2}dx = \int 2\sin t dt = -2\cos t = -2\cos\frac{x}{2}$$

(7) $t=3x^2+1$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=6x$ より $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\frac{dt}{dx}}=\dfrac{1}{6x}$ となる。よって

$$\begin{aligned}\int x(3x^2+1)^8dx &= \int xt^8\frac{1}{6x}dt=\frac{1}{6}\int t^8dt\\ &= \frac{1}{6}\frac{1}{9}t^9=\frac{1}{54}(3x^2+1)^9\end{aligned}$$

(8) $t=1+x^2$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=2x$ より $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\frac{dt}{dx}}=\dfrac{1}{2x}$ となる。よって

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(1+x^2)^3}dx &= \int \frac{x}{t^3}\frac{1}{2x}dt=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^3}dt\\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)t^{-2}=-\frac{1}{4(1+x^2)^2}\end{aligned}$$

(9) ここでは $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x$ の積分に帰着させる方法と，三角関数を用いる方法の 2 つを紹介しておこう。 $x=2t$ とおくと $\dfrac{dx}{dt}=2$ なので

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx &= \int\frac{1}{\sqrt{4-(2t)^2}}2dt=\int\frac{2}{\sqrt{4-4t^2}}dt\\ &= \int\frac{2}{2\sqrt{1-t^2}}dt=\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt\\ &= \arcsin t=\arcsin\frac{x}{2}\end{aligned}$$

ルートの中に a^2-x^2 がある場合などは $x=a\sin t$ とおくことで積分が計算できる場合がある。これに関しては後期に解析学 I で学ぶ。

$x=2\sin t$ とおくと $\dfrac{dx}{dt}=\cos t$ であり，

$$\begin{aligned}4-x^2 &= 4-\big(2\sin t\big)^2=4-4\sin^2 t\\ &= 4\big(1-\sin^2 t\big)=4\cos^2 t\end{aligned}$$

より $\sqrt{4-x^2}=2\cos t$ となる。また $\dfrac{x}{2}=\sin t$ より $t=\arcsin\dfrac{x}{2}$ である[1]となる。

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx &= \int\frac{1}{\cos t}\cos t dt=\int dt\\ &= t=\arcsin\frac{x}{2}\end{aligned}$$

---

[1] 逆三角関数を考えるときは範囲が問題になるが，今の場合不定積分なので $-\dfrac{\pi}{2}\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ を仮定しておく。

(10) ここから部分積分法の問題である。部分積分法は

$$\int f'gdx = fg - \int f'gdx$$

というものであった。$g = x$，$f' = e^{3x}$ とおくと

$$f = \int f'dx = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}\,^{(2)}$$

なので

$$\begin{aligned}\int xe^{3x}dx &= fg - \int fg'dx \\ &= \frac{x}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}x^{3x}dx = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}\end{aligned}$$

(11) $g = x$，$f' = \sin x$ とおくと $f = \int f'dx = \int \sin xdx = -\cos x$ なので

$$\begin{aligned}\int x\sin xdx &= fg - \int fg'dx \\ &= -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + \sin x\end{aligned}$$

(12) $g = x^2$，$f' = \cos x$ とおくと $f = \int f'dx = \int \cos xdx = \sin x$ なので

$$\begin{aligned}\int x^2\cos xdx &= fg - \int fg'dx \\ &= x^2\sin x - \int 2x\sin xdx \\ &= x^2\sin x - 2\int x\sin xdx\end{aligned}$$

となる。(11) の結果を用いると (そうでない場合はもう 1 回部分積分を実行すればよい),

$$\begin{aligned}\int x^2\cos xdx &= x^2\sin x - 2\int x\sin xdx \\ &= x^2\sin x - 2\left(-x\cos x + \sin x\right) \\ &= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x\end{aligned}$$

(13) $g = x^3$，$f' = e^x$ とおくと $f = e^x$ なので

$$\begin{aligned}\int x^3e^xdx &= fg - \int fg'dx \\ &= x^3e^x - \int 3x^2e^xdx = x^3e^x - 3\int x^2e^xdx\end{aligned}$$

---

(2) この積分は置換積分法で行うが，すでにできることになっていると仮定する。分からないものは置換積分の所を復習すること。

となる。この積分において $g=x^2$，$f'=e^x$ とおいて部分積分を実行し，さらにもう 1 回部分積分を実行すると

$$\int x^3 e^x dx = x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x$$

(14) $f'=x^3$，$g=\log x$ とおくと $f=\dfrac{1}{4}x^4$ なので

$$\begin{aligned}\int x^3\log x dx &= fg - \int fg' dx\\ &= \frac{1}{4}x^4\log x - \int \frac{1}{4}x^4\frac{1}{x}dx\\ &= \frac{1}{4}x^4\log x - \frac{1}{4}\int x^3 dx\\ &= \frac{1}{4}x^4\log x - \frac{1}{16}x^4\end{aligned}$$

(15) $f'=x$，$g=(\log x)^2$ とおくと $f=x$ なので

$$\begin{aligned}\int (\log x)^2 dx &= fg - \int fg' dx\\ &= x(\log x)^2 - \int x\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}dx\\ &= x(\log x)^2 - 2\int \log x dx\\ &= x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x\end{aligned}$$

となる。計算には

$$\int \log x dx = x\log x - x$$

を用いた。

(16) $f'=1$，$g=\arctan x$ とおくと $f=x$，$g'=\dfrac{1}{1+x^2}$ なので

$$\begin{aligned}\int \arctan x dx &= fg - \int fg' dx\\ &= x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx\end{aligned}$$

となる。ここで $t=1+x^2$ とおくと

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{1+x^2}dx &= \int \frac{x}{t}\frac{1}{2x}dt = \int \frac{1}{2}\frac{1}{t}dt\\ &= \frac{1}{2}\log|t| = \frac{1}{2}\log|1+x^2| = \frac{1}{2}\log(1+x^2)\end{aligned}$$

なので

$$\int \arctan x dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

となる。演習問題 5.16 も参考のこと。

(17) $f'=1$，$g=\arcsin x$ とおくと $f=x$，$g'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ なので

$$\begin{aligned}\int \arcsin x dx &= fg-\int fg' dx \\ &= x\arcsin x-\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx\end{aligned}$$

となる。ここで $t=1-x^2$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=-2x$ なので

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int \frac{x}{\sqrt{t}}\frac{1}{-2x}dt=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt \\ &= -\sqrt{t}=-\sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\int \arcsin x dx = x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$$

(18) 次の (19) と一緒に解く。

$$I=\int e^x\sin x dx,\quad J=\int e^x\cos x dx$$

とおく。$f'=e^x$，$g=\sin x$ とおいて部分積分を実行すると

$$I = e^x\sin x-\int e^x\cos x dx=e^x\sin x-J$$

となる。同様に $f'=e^x$，$g=\cos x$ とおいて部分積分を実行すると

$$J = e^x\cos x-\int e^x(-\sin x)dx=e^x\cos x+I$$

となる。よって I と J の連立方程式を解くと

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2}e^x\sin x-\frac{1}{2}e^x\cos x \\ J &= \frac{1}{2}e^x\sin x+\frac{1}{2}e^x\cos x\end{aligned}$$