数学序論追加問題解説 #1

河野

追加演習問題 3.1

(1) $\mathbb{Z}=\mathbb{Q}$ が成立しないことを定義に基づいて証明せよ。
(2) $\mathbb{Q}=\mathbb{R}$ が成立しないことを定義に基づいて証明せよ。
(3) $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geqq 0\}$，$B=\left\{x \,\middle|\, x=t^2, t\in\mathbb{R}\right\}$ とするとき $A=B$ が成立することを定義に基づいて証明せよ。
(4) $A=\{x\in\mathbb{Q}\mid x\geqq 0\}$，$B=\left\{x \,\middle|\, x=t^2, t\in\mathbb{Q}\right\}$ とするとき $A=B$ が成立しないことを定義に基づいて証明せよ。

(1)

$$\mathbb{Z}=\mathbb{Q} \iff \mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\wedge\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Z}$$

なので $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Z}$ が成立しないことを示せば。$\mathbb{Z}=\mathbb{Q}$ の不成立が分かる。

$$\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Z} \iff \text{任意の } a \text{ に対し } a\in\mathbb{Q}\Longrightarrow a\in\mathbb{Z}$$

なので

$$\mathbb{Q}\not\subseteq\mathbb{Z} \iff \text{ある } a \text{ が存在して } a\in\mathbb{Q}\wedge a\notin\mathbb{Z}$$

である。$a=\dfrac{1}{2}$ とすると $a\in\mathbb{Q}$ かつ $a\notin\mathbb{Z}$ なので $\mathbb{Q}\not\subseteq\mathbb{Z}$ が示され証明が終わる。

(2)

$$\mathbb{Q}=\mathbb{R} \iff \mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}\wedge\mathbb{R}\subseteq\mathbb{Q}$$

なので $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{Q}$ が成立しないことを示せば。$\mathbb{Q}=\mathbb{Z}$ の不成立が分かる。

$$\mathbb{R}\subseteq\mathbb{Q} \iff \text{任意の } a \text{ に対し } a\in\mathbb{R}\Longrightarrow a\in\mathbb{Q}$$

なので

$$\mathbb{R}\not\subseteq\mathbb{Q} \iff \text{ある } a \text{ が存在して } a\in\mathbb{R}\wedge a\notin\mathbb{Q}$$

である。$a=\sqrt{2}$ とすると $a\in\mathbb{R}$ かつ $a\notin\mathbb{Q}$ なので $\mathbb{Q}\not\subseteq\mathbb{Z}$ が示され証明が終わる。(ここで $\sqrt{2}$ が有理数でないことは既知とした。)

(3) $A\subseteq B$ かつ $B\subseteq A$ を示せばよい。x を A の任意の元とすると x は 0 以上の実数である。このとき $t=\sqrt{x}$ とおくと $t\in\mathbb{R}$ であり $x=t^2$ が成立している。よって $x\in B$ となり $A\subseteq B$ が示される。

逆に x を B の任意の元とすると，実数 t が存在して $x=t^2$ となっている。$x\in\mathbb{R}$ であり，$x\geqq 0$ なので $x\in A$ となり，$B\subseteq A$ が示される。以上により $A=B$ が成立する。

(4) $A\not\subseteq B$ の成立を示せば，$A=B$ の不成立が示される。

$$A\subseteq B \iff \text{任意の } x \text{ に対し } x\in A\Longrightarrow x\in B$$

なのでこの成立を仮定すると $2\in A$ なので $2\in B$ となる。このとき $t\in\mathbb{Q}$ が存在して $2=t^2$ となる。この t は $\pm\sqrt{2}$ でなければならないので $\pm\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ となり矛盾。よって $A\subseteq B$ は正しくないことが分かる。