# 数学序論追加問題解説 #2

河野

**追加演習問題 2.1**　次を真理表を書くことにより証明せよ。

(1) $P \lor Q \equiv Q \lor P$

(2) $P \lor (P \land Q) \equiv P$

(3) $P \land (P \lor Q) \equiv P$

**(1)**　真理表は次の様になる。

| $P$ | $Q$ | $P \lor Q$ | $Q \lor P$ |
|---|---|---|---|
| T | T | T | T |
| T | F | T | T |
| F | T | T | T |
| F | F | F | F |

対応する欄の真偽が同じなので同値であることが分かる。
**(2)**　真理表は次の様になる。

| $P$ | $Q$ | $P \land Q$ | $P \lor (P \land Q)$ |
|---|---|---|---|
| T | T | T | T |
| T | F | F | T |
| F | T | F | F |
| F | F | F | F |

対応する欄の真偽が同じなので同値であることが分かる。
**(3)**　真理表は次の様になる。

| $P$ | $Q$ | $P \lor Q$ | $P \land (P \lor Q)$ |
|---|---|---|---|
| T | T | T | T |
| T | F | T | T |
| F | T | T | F |
| F | F | F | F |

対応する欄の真偽が同じなので同値であることが分かる。

**追加演習問題 2.2**　次において $P$ は $Q$ の「必要十分条件，必要条件ではあるが十分条件ではない，十分条件ではあるが必要条件ではない，必要条件でも十分条件でもない」のいずれかであるか決定せよ。ここで $x, y$ は実数とする。

(1) $P : (x+1)(y+1) = 0, \quad Q : x = -1$ または $y = -1$

(2) $P : (x+1)(y+1) = 0, \quad Q : x = -1$ かつ $y = -1$

(3) $P : (x+1)(y+1) = 0$,  $Q : x \neq -1$ かつ $y = -1$

(4) $P : (x+1)(y+1) = 0$,  $Q : x \neq -1$ または $y = -1$

$XY = 0 \Longleftrightarrow X = 0$ または $Y = 0$ なので

$$P \Longleftrightarrow x = -1 \text{ または } y = -1$$

である。

**(1)** 上の注意より $P$ と $Q$ は同値なので $P$ は $Q$ の必要十分条件である。

**(2)** $Q \Longrightarrow P$ は成立する。$P \Longrightarrow Q$ は成立しない。何故なら $x = -1$ かつ $y = 0$ のとき $P$ は真であるが，$Q$ は偽になるからである。よって $P$ は $Q$ の必要条件であるが十分条件ではない。

**(3)** $Q$ が成立しているとき，$y = -1$ なので $(x+1)(y+1) = 0$ となり $P$ が成立する。よって $Q \Longrightarrow P$ は成立する。しかし $x = -1$ かつ $y = -1$ のとき $P$ は真であるが，$Q$ は偽である。よって $P \Longrightarrow Q$ は成立しない。よって $P$ は $Q$ の必要条件であるが十分条件ではない。

**(4)** $x = -1$ かつ $y = 0$ のとき $(x+1)(y+1) = 0$ なので $P$ は真であるが $Q$ は偽である。よって $P \Longrightarrow Q$ は成立しない。$x = 0$ かつ $y = 0$ のとき $Q$ は真であるが $(x+1)(y+1) = 1 \neq 0$ なので $P$ は偽である。よって $Q \Longrightarrow P$ は成立しない。$P$ は $Q$ の必要条件でも十分条件でもない。

**追加演習問題 2.3** $a, b$ は与えられた実数とする。

$$\text{任意の } x \in \mathbb{R} \text{ に対し } a > x \Longrightarrow b > x$$

の否定命題をつくれ。またこの命題の意味を考えることにより，$a$ と $b$ がどのような関係にあるとき真になるか考察せよ。

否定命題は

$$\text{ある } x \in \mathbb{R} \text{ が存在して } a > x \text{ かつ } x \geqq b$$

である。否定命題が正しいとき $a > x$ かつ $x \geqq b$ より $a > b$ が成立する。逆に $a > b$ が成立するとき $x = \dfrac{a+b}{2}$ とおくと否定命題が成立する。よって否定命題の必要十分条件は $a > b$ であることが分かる。よって元の命題の必要十分条件は $a \leqq b$ である。

**追加演習問題 2.4** 関数 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ が $a$ で連続であることの「厳密な」定義は「任意の実数 $\varepsilon > 0$ に対しある実数 $\delta > 0$ が存在して，任意の実数 $x$ に対し，$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$」となることである。関数 $f$ が $a$ で連続でないとい命題を「任意」と「存在」を用いて書け。

ある実数 $\varepsilon > 0$ が存在して，任意の実数 $\delta > 0$ に対し，ある実数 $x$ が存在して $0 < |x - a| < \delta$ かつ $|f(x) - f(a)| \geqq \varepsilon$ が成立する。

**追加演習問題 3.1** $N_0 = \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \geqq 0 \}$ とする。$A = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ は } 8 \text{ で割ると余りが } 3 \text{ である} \}$, $B = \{ n \mid \text{ある } k \in \mathbb{N}_0 \text{が存在して } n = 8k + 3 \}$ とするとき次を示せ。

(1) $B \subseteq A$

(2) $A \subseteq B$

(3) $A = B$

**(1)** $n$ を $B$ の任意の元とする。このとき $k \in \mathbb{N}_0$ が存在して $n = 8k + 3$ と書ける。$k \in \mathbb{N}_0$ より $n$ は整数であるが，$k \geqq 0$ より $n = 8k + 3 \geqq 3 > 0$ となるので $n$ は自然数である。また $n$ を 8 で割ると余りが 3 であることも分かる。よって $n \in A$ となり，$B \subseteq A$ が示される。
**(2)** $n$ を $A$ の任意の元とする。このとき $n \in \mathbb{N}$ であり $n$ を 8 で割ると余りは 3 である。よってある整数 $k \in \mathbb{Z}$ が存在して $n = 8k + 3$ と書ける。$k < 0$ とすると，$k \leqq -1$ より $n = 8k + 3 \leqq 8(-1) + 3 \leqq -5 < 0$ となるので $k \geqq 0$ である。よって $k \in \mathbb{N}_0$ となる。よって $n \in B$ となり，$A \subseteq B$ が示される。
**(3)** 2 つの集合 $A, B$ が等しいことの定義は

$$A = B \quad \Longleftrightarrow \quad 「A \subseteq B \text{ かつ } B \subseteq A」$$

であった。(1)，(2) より $A \subseteq B$ かつ $B \subseteq A$ が示されているので $A = B$ が成立する。

**追加演習問題 3.2** 写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全射であるとは「任意の $y \in Y$ に対し元 $x \in X$ が存在して $y = f(x)$ となる」ことである。また写像 $f : X \longrightarrow Y$ が単射であるとは,「任意の $x, x' \in X$ に対し $x \neq x'$ ならば $f(x) \neq f(x')$ が成立する」ことである。このとき次の問いに答えよ。

(1) 「写像 $f : X \longrightarrow Y$ が単射でない」という命題を「任意」と「存在」を用いて表せ。

(2) 「写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全射でない」という命題を「任意」と「存在」を用いて表せ。

(3) $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ を $f(1) = 4, f(2) = 3, f(3) = 2, f(4) = 1, f(5) = 4$ で定義する。このとき $f$ が単射であるかどうか理由をつけて述べよ。

(4) $f : \{1, 2, 3, 4\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ を $f(1) = 4, f(2) = 3, f(3) = 2, f(4) = 1$ で定義する。このとき $f$ が単射であるかどうか理由をつけて述べよ。

(5) $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ を $f(1) = 4, f(2) = 1, f(3) = 3, f(4) = 1, f(5) = 4$ で定義する。このとき $g$ が全射であるかどうか理由をつけて述べよ。

(6) $f : \{1, 2, 3, 4\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ を $f(1) = 4, f(2) = 1, f(3) = 3, f(4) = 2$ で定義する。このとき $g$ が全射であるかどうか理由をつけて述べよ。

**(1)** ある元 $x, x' \in X$ が存在して $x \neq x'$ かつ $f(x) = f(x')$ が成立する。
**(2)** ある元 $y \in Y$ が存在して任意の $x \in X$ に対し $y \neq f(x)$ が成立する。
**(3)** $1, 5 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ に対し $1 \neq 5$ であり $f(1) = 4 = f(5)$ が成立するので単射ではない。
**(4)** $f(1) = 4 \neq 3 = f(2)$，$f(1) = 4 \neq 2 = f(3)$，$f(1) = 4 \neq 1 = f(4)$，$f(2) = 3 \neq 2 = f(3)$，$f(2) = 3 \neq 1 = f(4)$，$f(3) = 2 \neq 1 = f(4)$ なので任意の $x, x' \in \{1, 2, 3, 4\}$ に対し「$x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$」が成立している。よって $f$ は単射である。
**(5)** $2 \in \{1, 2, 3, 4\}$ が存在して任意の $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ に対し $f(x) \neq 2$ となるので，$f$ は全射ではない。
**(6)** $y = 1$ に対しては $x = 2$ とおくと $f(x) = 1$，$y = 2$ に対しては $x = 4$ とおくと $f(x) = 2$，$y = 3$ に対しては $x = 3$ とおくと $f(x) = 3$，$y = 4$ に対しては $x = 1$ とおくと $f(x) = 4$ なので任意の $y \in \{1, 2, 3, 4\}$ に対し $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ が存在して $y = f(x)$ となる。よって $f$ は全射である。