

4.4 対数関数

$a \neq 1$ を正の実数として $f(x) = a^x$ を指数関数とする。指数関数の性質のところでも述べたように、 $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ は単調増加か単調減少であるので単射である。また、 $a > 1$ のときは $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ であり、 $0 < a < 1$ のときは $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$ となり、 $(0, \infty)$ の全ての値をとるので全射である。よって、全単射である。

従って、逆関数 $f^{-1}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する。この関数を $\log_a x$ と書き、 a を底とする対数関数という。

$$y = a^x \iff x = \log_a y$$

対数関数は指数関数の逆関数であるから、対数関数の諸性質は指数関数の性質から導かれる。即ち、次が成り立つ。

命題 4.11 (1) [対数法則] 任意の正の実数 p, q に対して次が成り立つ。

$$\log_a pq = \log_a p + \log_a q$$

(2) 任意の正の実数 p と任意の実数 c に対して次が成り立つ。

$$\log_a p^c = c \log_a p$$

(3) [底の変換] 1 ではない任意の正の実数 a, b と任意の正の実数 p に対して次が成り立つ。

$$\log_a p = \frac{\log_b p}{\log_b a}$$

(4) 対数関数 $\log_a x$ は $a > 1$ のとき単調増加であり、 $0 < a < 1$ のとき単調減少である。

(5) $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$ が成り立つ。

証明 (1) a^x という関数は任意の正の実数とその値として持つから、任意の正の実数 p, q に対してある実数 s, t があって $p = a^s, q = a^t$ となる。指数法則から、 $r = a^{s+t}$ とおくと、 $r = a^{s+t} = a^s a^t = pq$ である。また、対数関数の定義から、 $s = \log_a p, t = \log_a q, s+t = \log_a r = \log_a pq$ であるから、 $\log_a r = \log_a pq = \log_a p + \log_a q$ となる。

(2) $p = a^s$ とする。指数法則から $p^c = (a^s)^c = a^{cs}$ であるから、 $\log_a p^c = cs = c \log_a p$ が成り立つ。

(3) $b^u = p, b^v = a$ とすると $\log_b p = u, \log_b a = v$ である。

$$p = b^u = b^{\frac{u}{v} \cdot v} = (b^v)^{\frac{u}{v}} = a^{\frac{u}{v}}$$

であるから、

$$\log_a p = \frac{u}{v} = \frac{\log_b p}{\log_b a}$$

となる。

(4) $f: X \rightarrow Y$ が単調増加関数のとき、勿論 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$ が成立するが、 $\forall x_1, x_2 \in X, f(x_1) < f(x_2) \implies x_1 < x_2$ も成立することを注意しておく (演習問題 4.8)。最初に $a > 1$ のときを

このプリントも含め講義関連のプリントは <http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html> においてある。

考える。示すべきことは $\forall x_1, x_2 \in (0, \infty) x_1 < x_2 \implies \log_a x_1 < \log_a x_2$ である。 x_1, x_2 を $x_1 < x_2$ となる任意の正の実数とする。 $y_1 = \log_a x_1, y_2 = \log_a x_2$ とすると、 $x_1 = a^{y_1}, x_2 = a^{y_2}$ となる。 $x_1 < x_2$ より $a^{y_1} < a^{y_2}$ が成立する。 a^y は単調増加減少なので、最初に述べた注意より、 $y_1 < y_2$ が成立する。

次に $0 < a < 1$ のときを考える。単調増加の場合と同様に $f: X \rightarrow Y$ が単調減少関数のとき、 $\forall x_1, x_2 \in X f(x_1) < f(x_2) \implies x_1 > x_2$ が成立する (演習問題 4.8)。示すべきことは $\forall x_1, x_2 \in (0, \infty) x_1 < x_2 \implies \log_a x_1 > \log_a x_2$ である。 x_1, x_2 を $x_1 < x_2$ となる任意の正の実数とする。 $y_1 = \log_a x_1, y_2 = \log_a x_2$ とすると、 $x_1 = a^{y_1}, x_2 = a^{y_2}$ となる。 $x_1 < x_2$ より $a^{y_1} < a^{y_2}$ が成立する。 a^y は単調減少なので、最初に述べた注意より、 $y_1 > y_2$ が成立する。

(5) $a^0 = 1$ より、対数の定義を用いると $0 = \log_a 1$ となる。 $a^1 = a$ より $1 = \log_a a$ となる。■

この命題から次がわかる。

系 4.12 (1) $\log_a \frac{1}{p} = -\log_a p$.

(2) $\log_a \frac{p}{q} = \log_a p - \log_a q$

演習問題 4.7 系 4.12 を命題 4.11 から導け。

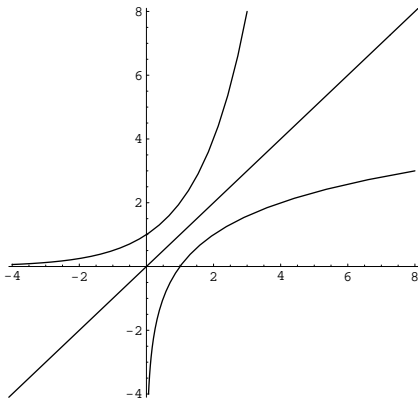
演習問題 4.8 $f: X \rightarrow Y$ が単調増加関数のとき、 $\forall x_1, x_2 \in X f(x_1) < f(x_2) \implies x_1 < x_2$ が成立することを示せ。 $f: X \rightarrow Y$ が単調減少関数のとき、 $\forall x_1, x_2 \in X f(x_1) < f(x_2) \implies x_1 > x_2$ が成立することを示せ。

演習問題 4.9

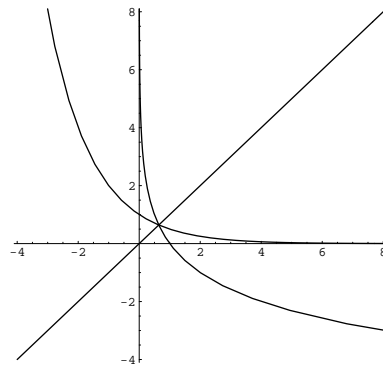
(1) a, b, c を正の実数とする。 $a^b = c^{b \log_c a}$ を示せ。

(2) a, b, c を正の実数とする。 $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ を示せ。

対数関数のグラフ 対数関数は指数関数の逆関数なので、そのグラフは、対応する指数関数のグラフを $y = x$ に関して対称に写せばよい。



$y = 2^x$ と $y = \log_2 x$ のグラフ



$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ と $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフ

このように対数は、積の計算が和の計算に置き換わる、という画期的な性質を持っている。計算機ではなく、全てを手計算で行っていた時代では、これによる恩恵は、計り知れないものがある。対数は、スコットランドのジョン・ネイピア (1550–1617) とスイスのヨブスト・ビュルギ (1552–1652) によって同じ頃に発見されたと言われているが、世に知られて、広く使われるようになったのは、ネイピアによる著作「対数の驚くべき規則の叙述」(1614年) と「対数の驚くべき規則の構成」(1619年) による。これらの本の中には、ネイピアが20年かけて計算した詳細な対数表が含まれており (もちろん全て手計算であるにもかかわらず、ほとんど誤りがなかった)、その後

のあらゆる分野における数値計算の労力を劇的に軽減した。その意味でネイピアは、その後の科学技術の発展に多大な貢献をなしたと言える。(実際にはその後、ヘンリー・ブリッグズ、アドリアン・ヴラックらがネイピアとの議論に基づいて対数表を改良し、より詳細な表を作って 1628 年に発表した。その対数表は 20 世紀に至るまで、ほとんど全ての対数表の基礎となった。)

また、数を小数を用いて表すという、現在普通につかわれている表記方法は、ネイピアによって考え出され、上記の本で初めて現れた(小数の基本的な考え方やある種の表記方法は以前からあったが、普及していなかった)。當時も精密な計算は 7~8 桁の精度で行われていたが、例えば 12.345678 は $12 \frac{345678}{1000000}$ などと書かれていた。

ちなみに、自然対数の底 e を **ネイピアの定数** というが、実際、彼が最初に考えた対数は、 e という数を意識はしていなかったが、基本的には自然対数であった。その後、より計算に便利な、10 を底とする常用対数を提案するようになる。

4.5 逆三角関数

三角関数 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数を考えてみよう。逆関数は、全単射になっていなければ定義できないが、 $\sin x$, $\cos x$ は実数全体で定義された関数と見なすと単射ではない。そこで、逆関数を考えるためには、定義域を限定して、全単射になるような部分だけを取り出す必要がある。

$\sin x$ や $\cos x$ がその上で全単射になるような区間は無数にあり、そのうちのどれを採用したとしても、そこに限定した $\sin x$ や $\cos x$ は、当然、逆関数を持つ。そのような区間として、最も「標準的な」ものとしては、次のようなものが考えられる。

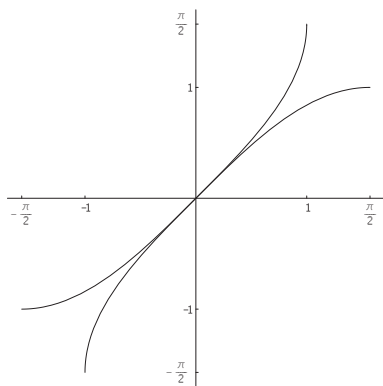
$f(x) = \sin x$ とする。この関数の定義域を $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ に制限した関数 f (名前を変更する必要があるかもしれないが、ここでは混同して用いる) を

$$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

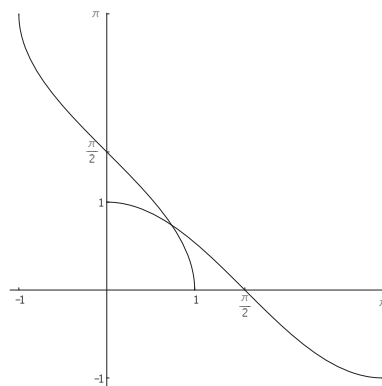
とすると、 f は全単射になる。従って、逆関数

$$f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

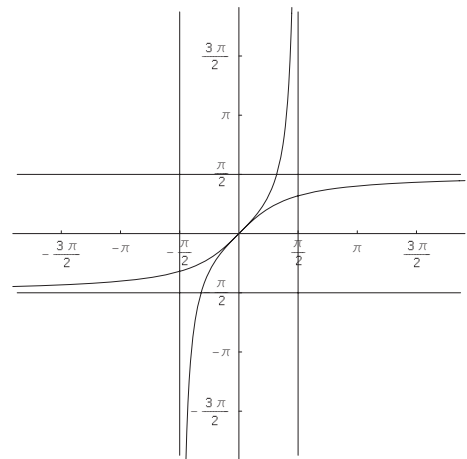
が存在する。これを $\arcsin x$ と書く(アークサインと読む)。 $\sin^{-1} x$ という記法も用いられるが、誤解を生みやすい記号なのでこの講義では採用しないことにする。



$\sin x$ と $\arcsin x$



$\cos x$ と $\arccos x$



$\tan x$ と $\arctan x$ のグラフ

$g(x) = \cos x$ とする。この関数の定義域を $[0, \pi]$ に制限した関数 g (名前を変更する必要があるかもしれないが、ここでは混同して用いる) を

$$g: [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$

とすると、 g は全単射になる。従って、逆関数

$$g^{-1}: [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

が存在する。これを $\arccos x$ と書く (**アークコサイン**と読む)。 $\cos^{-1} x$ という記法も用いられるが、誤解を生みやすい記号なのでこの講義では採用しないことにする。

$\tan x$ は $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ から \mathbb{R} への全単射であるから、 \mathbb{R} から $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ への逆関数が存在する。これを $\arctan x$ などと書き、**アークタンジェント** x と読む。 $\tan^{-1} x$ という記法も用いられるが、誤解を生みやすい記号なのでこの講義では採用しないことにする。

$\arctan x$ は実数全体で定義された関数なので、 $\frac{\pi}{2} + n\pi$ という点で値が定義されない $\tan x$ と比べると、どちらかと言うと、より「まともな」関数である、という見方もできる。

演習問題 4.10

(1) 次の値を求めよ。

$$\arcsin \frac{1}{2}, \quad \arccos \frac{1}{2}, \quad \arctan 1, \quad \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \arctan \sqrt{3}, \quad \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(2) $-1 \leq x \leq 1$ の時、 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ を示せ。

(3) $x > 0$ の時、 $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ を示せ。

(4) $\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ を示せ。

4.6 双曲線関数

講義では省略したが、双曲線のパラメータ表示には次に紹介する双曲線関数が用いられる。積分でも使用する場合がありますので関数を紹介しておく。パラメータ表示について一言だけふれておくと、 $x = \cos t$, $y = \sin t$ は楕円の標準形ともいえる「円」

$$x^2 + y^2 = 1$$

のパラメータ表示を与えるのに対し、ここで定義する頂曲線関数は双曲線の標準形ともいえる「直角双曲線」

$$x^2 - y^2 = 1$$

のパラメータ表示を与える。

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

を双曲線関数という。 \cosh は**ハイパボリック・コサイン**などと読む⁽¹⁾。

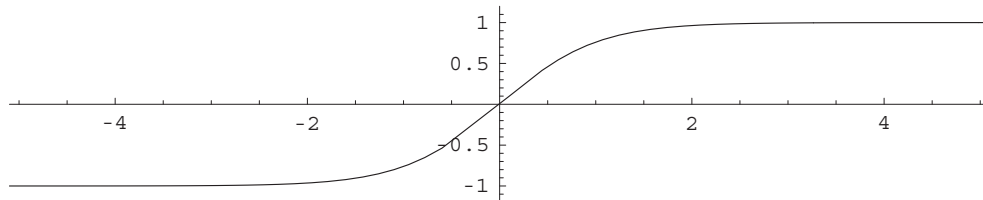
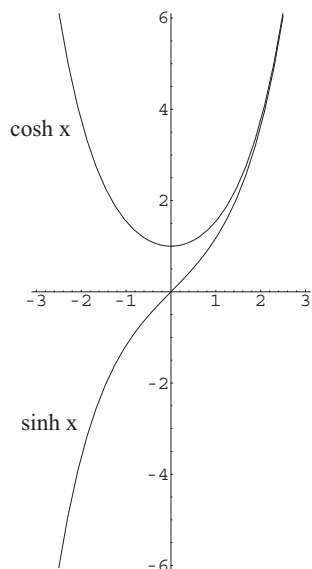
演習問題 4.11 次を示せ。

(1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(2) $\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$

⁽¹⁾ $\cosh x$ を $\cos(hx)$ だと勘違いするものがあるが、括弧を用いて表すと $\cosh(x)$ であることに注意。

(3) $\sinh(a + b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b$



$\sinh x$ と $\cosh x$ のグラフ

$\tanh x$ のグラフ

明らかに $\cosh x$ は偶関数であり，そのグラフは y 軸に対して対称となるが，さらに $[0, \infty)$ では単調増加となっている（微分してみるとわかる）。従って， $\cosh x$ は $[0, \infty)$ に制限すると， $[0, \infty)$ から $[1, \infty)$ への全単射を与える。

また， $\sinh x$ は奇関数であり，そのグラフは原点に関して点対称である。 $\sinh x$ は \mathbb{R} 全体で単調増加であり（微分してみるとわかる），実数全ての値をとるので， \mathbb{R} からそれ自身への全単射を与える。

演習問題 4.12

(1) $\cosh x$ を $[0, \infty)$ に制限した関数の逆関数を $\cosh^{-1} x$ とする。これは $[1, \infty)$ から $[0, \infty)$ への関数である。

$$\cosh^{-1} x = \log \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$$

であることを示せ。

(2) $\sinh x$ の逆関数を $\sinh^{-1} x$ とする。これは \mathbb{R} 全体で定義された関数である。

$$\sinh^{-1} x = \log \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

であることを示せ。

(3) $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ とする。任意の x に対して $|\tanh x| < 1$ を示せ。

(4) $\tanh x$ は単調増加関数であることを（微分を使わずに）示せ。

$x \rightarrow -\infty$ のとき $\tanh x \rightarrow -1$ であり， $x \rightarrow \infty$ のとき $\tanh x \rightarrow 1$ であることがわかるので，

$\tanh x$ は \mathbb{R} から $(-1, 1)$ への全単射を与える。従って，その逆写像 $\tanh^{-1} x$ は， $(-1, 1)$ 上で定義され， \mathbb{R} 全体の値をとる単調増加関数となる。