

5 微分法

微分法の最初に数列及び関数の極限に簡単に復習しておく。

5.1 数列の極限

各自然数 n に対し, 数 a_n が定められているとき $\{a_n\}$ を無限数列という (以下単に数列という)。 n を限りなく大きくしたとき a_n がある一定の値 α に限りなく近づくとする。このとき数列 $\{a_n\}$ は α に収束する⁽¹⁾といい, α をその極限值という。このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

あるいは

$$a_n \rightarrow \alpha \quad (n \rightarrow \infty)$$

と書く。 $\{a_n\}$ が収束しないとき, 発散するという。発散するとき, $n \rightarrow \infty$ のときの a_n の挙動は様々であるが, 特に $a_n \rightarrow \infty$ あるいは $a_n \rightarrow -\infty$ ここにあった [の] は間違いとなるときの, $\pm\infty$ は数ではないが, 便宜的に

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \text{または} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

と書く。

例 5.1 (1) $a_n = \frac{1}{n}$ のとき, 即ち

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

となる数列を考える。 $n \rightarrow \infty$ としたとき, $\frac{1}{n}$ は 0 に近づく。即ち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

が成立する。

(2) $a_n = n^2$ とおくと a_n は収束しないが,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

である。

(3) $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ とおくと a_n は収束しない。また $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$ も成立しない。

(4) a を実数とする。 $a_n = a^n$ とおくと $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を考える。指数関数の所で学んだように a の値によって異なる。最初に $a = 2$ のとすることを考える。 $a_1 = 2$ であり $a_2 = 4$ である。一般に $a_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2a_n$ が成立するので, 前の項の 2 倍になっている。 n が大きくなるにしたがい a_n は大きくなる。よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

このプリントも含め講義関連のプリントは <http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html> においてある。

(1)これは直感的説明であり厳密な定義ではない。厳密には次に述べる「 ε - N 論法」と呼ばれる方法で定義される。この講義ではこの論法に深入りはしない。数列 a_n が次を満たすとき「数列 a_n は α に収束する」といい, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ と書く; $\forall \varepsilon (> 0) \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \ n > N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成立する。

が成立している。次に $a = \frac{1}{2}$ の場合を考える。 $a_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}a_n$ が成立するので、前の項の $\frac{1}{2}$ 倍になっている。よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

が成立している。数列 $a_n = a^n$ の収束・発散は次のようになる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} \infty & (\text{発散}) & a > 1 \\ 1 & & a = 1 \\ 0 & & -1 < a < 1 \\ \text{発散} & & a \leq -1 \end{cases}$$

定理 5.2 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ (α, β は有限値) のとき

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (ka_n) = k \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k\alpha$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha \pm \beta$
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha \beta$
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ (ただし $\beta \neq 0$ とする。)

が成立する。

(1)~(4) は直感的には明らかであろう⁽²⁾。たとえば (3) は次のことよりわかる。

$$\begin{aligned} \alpha\beta - a_n b_n &= (\alpha\beta - a_n \beta) + (a_n \beta - a_n b_n) \\ &= (\alpha - a_n)\beta + a_n(\beta - b_n) \end{aligned}$$

ここで $\{a_n\}$ は収束すると仮定したので、 $|a_n|$ は有界、すなわちある定数 $K > 0$ より小さい ($\forall n \in \mathbb{N} |a_n| < K$)。よって $n \rightarrow \infty$ のとき

$$\begin{aligned} |(\alpha - a_n)\beta| &= |\alpha - a_n| \cdot |\beta| \rightarrow 0 & (\because |\alpha - a_n| \rightarrow 0) \\ |a_n(\beta - b_n)| &\leq K|\beta - b_n| \rightarrow 0 & (\because |\beta - b_n| \rightarrow 0) \end{aligned}$$

よって $a_n b_n \rightarrow \alpha\beta$ ($n \rightarrow \infty$) が成立する。■

この定理により、数列の各項がいくつかの代数的結合(和・差・積・商)で表されるときは、その各々の極限値がわかれば容易にその極限値はもとまる。しかし (4) において、 $a_n, b_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) となる場合や、 a_n, b_n が $\pm\infty$ に発散する場合は $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ は形式的には $\frac{0}{0}$ や $\frac{\infty}{\infty}$ となり、値が定まらないように見える(実際には収束する場合も発散する場合もある)。このような場合を不定形という。微積分においては不定形の極限が大事なことが多い。

例 5.3 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+2}$ をもとめよ。

分子、分母は $n \rightarrow \infty$ のとき ∞ になるが、それらの比自体は有限値に収束することがありうる。この場合も n が十分大きければ、 $n+2$ と n の比はほぼ 1、同様に $\sqrt{n^2+1}$ と $\sqrt{n^2} = n$ の比も同様、したがって $\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1} \doteq 1$,

⁽²⁾ここでも厳密には「 ε - N 論法」で証明される。ここでの「証明」は厳密な意味では「証明」ではなく説明である。

$\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1} \rightarrow 1$ となることが予想される。実際

$$\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+2} = \frac{\sqrt{n^2+1} \times \frac{1}{n}}{(n+2) \times \frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{2}{n}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

すなわち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+2} = 1$$

である。

演習問題 5.1 次の極限值を求めよ。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{3n-1} \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{2n^2+n+1} \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+3n+1}}{n+2} \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^n-1}$$

これらの例・演習問題では分子・分母の増大度を比較的容易にくらべることができた。しかし一般には単純でない。よく分からない数列を知られた数列ではさむことにより数列の極限を求める方法が知られている。次の定理がそれである。

定理 5.4 [はさみうちの定理] 任意の自然数 n に対し

$$b_n \leq a_n \leq c_n$$

が成立しているとする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$ のとき a_n も収束し、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

が成立する。

例 5.5 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ ($a > 0$) を示せ。

$N > a$ となる自然数 N を 1 つ選んで固定する。 $n > N$ とする。 $k > N$ のとき $\frac{a}{k} < \frac{a}{N}$ が成立することに注意すると

$$\begin{aligned} 0 < \frac{a^n}{n!} &= \frac{a}{1} \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{N-1} \frac{a}{N} \cdots \frac{a}{n} \\ &< \frac{a}{1} \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{N-1} \underbrace{\frac{a}{N} \frac{a}{N} \cdots \frac{a}{N}}_{n-N+1 \text{ 個}} = \frac{a}{1} \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{N-1} \left(\frac{a}{N}\right)^{n-N+1} \end{aligned}$$

という不等式が成立する。ここで $b_n = 0$, $c_n = \frac{a}{1} \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{N-1} \left(\frac{a}{N}\right)^{n-N+1}$ と定義し、これに定理 5.4 を適用する。 $\frac{a}{N} < 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{N}\right)^{n-N+1} = 0$ となる。よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ が得られる。 ■

この例は a^n ($a > 1$) の増大度より、 $n!$ の増大度の方がさらに大きいことを意味する。

演習問題 5.2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{2^n} = 0$ を示せ。

(ヒント) $a_n = \frac{n^3}{2^n}$ とする。 n を十分大きくすれば $\frac{1}{2} < r < 1$ となる適当な r を選んで $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$ とできる。

$\frac{\infty}{\infty}$ や $\frac{0}{0}$ の形の不定形の他の不定形の極限としては $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} - n)$ のように $\infty - \infty$ の形などもある。

例 5.6 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} - n) = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{n^2+n} - n = \frac{(\sqrt{n^2+n} - n)(\sqrt{n^2+n} + n)}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1} \rightarrow \frac{1}{2}$$

(注, $\frac{\infty}{\infty}$ の形に変形してもとめた)

演習問題 5.3 次をもとめよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 2n)$

ここで指数関数の微分において重要な次の数列の極限を考える。

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

とすると $\{a_n\}$ は収束する⁽³⁾。その極限値を e と定める。

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{1}$$

e は無理数であり,

$$e = 2.7182818\dots$$

と近似されることが知られている。また e は

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \tag{2}$$

と無限級数で表されることを微分の所で学ぶであろう。

数列 (1) は収束が非常に遅く, 数列 (2) は非常に早い。このことは演習問題 5.4 を解くことにより実感してほしい。

注: 無限級数

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

とは, 部分和, $S_0 = 1, S_1 = 1 + \frac{1}{1!}, S_2 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}, \dots, S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}, \dots$ で定まる数列 $\{S_n\}$ の極限値を意味する。

演習問題 5.4 電卓等を使って数列 (2) の部分和を S_0 から S_{10} まで計算し, S_n がしだいに e に近づくことをたしかめよ。また $a_{10} = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10}, a_{100} = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100}, a_{1000} = \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000}$ の値と比較せよ。

例 5.7 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow e \cdot 1 = e \quad (n \rightarrow \infty)$$

演習問題 5.5 次をもとめよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$

⁽³⁾このことは「単調増加数列 $\{a_n\}$ の各項がすべてある定数 K より小であるならば数列は収束する」という定理から導かれるがくわしい証明は省く。

5.2 関数の極限

変数 x が a に (a と異なる値をとりながら) 限りなく近づくとき、関数 $f(x)$ の値がある数 A に限りなく近づくとする。このとき

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

と書き、 $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ は A に収束するという⁽¹⁾。また A を $x \rightarrow a$ としたときの $f(x)$ の極限值という。

$x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ の値が $\pm\infty$ となる時 $\pm\infty$ は数ではないが

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$$

と書くのは数列の場合と同様である。

変数 x が $x > a$ を満たしながら a に限りなく近づくとき、関数 $f(x)$ の値がある数 A に限りなく近づくとする。このとき

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$$

と書き、 $x \rightarrow a+0$ のとき $f(x)$ は A に収束するという。また A を $x \rightarrow a+0$ としたときの $f(x)$ の右側極限值という。

変数 x が $x < a$ を満たしながら a に限りなく近づくとき、関数 $f(x)$ の値がある数 A に限りなく近づくとする。このとき

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$$

と書き、 $x \rightarrow a-0$ のとき $f(x)$ は A に収束するという。また A を $x \rightarrow a-0$ としたときの $f(x)$ の左側極限值という。 $a=0$ のとき $x \rightarrow 0+0$ を $x \rightarrow +0$ と $x \rightarrow 0-0$ を $x \rightarrow -0$ と略記することもある。

変数 x が限りなく大きくなる時、関数 $f(x)$ の値がある数 A に限りなく近づくとする。このとき

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

と書き、 $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x)$ は A に収束するという⁽²⁾。

変数 x が限りなく小さくなる時、関数 $f(x)$ の値がある数 A に限りなく近づくとする。このとき

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$$

と書き、 $x \rightarrow -\infty$ のとき $f(x)$ は A に収束するという。

例 5.8 関数の極限に関するいくつかの例：

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3) &= 4 & (2) \lim_{x \rightarrow 0} \sin x &= 0 \\ (3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} &= 3 & (4) \lim_{x \rightarrow \infty} 2^x &= \infty \end{aligned}$$

数列の場合と同様に次の定理が成立する。

定理 5.9 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ とする (A, B は有限値)。

⁽¹⁾これは直感的説明であり厳密な定義ではない。厳密には次に述べる「 ε - δ 論法」と呼ばれる方法で定義される。この講義ではこの論法に深入りはしない。関数 f が次を満たすとき「 $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ は A に収束する」といい、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ と書く； $\forall \varepsilon (> 0) \in \mathbb{R} \exists \delta (> 0) \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$ が成立する。

⁽²⁾これは直感的説明であり厳密な定義ではない。厳密には次に述べる「 ε - N 論法」と呼ばれる方法で定義される。この講義ではこの論法に深入りはしない。関数 f が次を満たすとき「 $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x)$ は A に収束する」といい、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ と書く； $\forall \varepsilon (> 0) \in \mathbb{R} \exists N (> 0) \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R} x > N \implies |f(x) - A| < \varepsilon$ が成立する。

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} (kf(x)) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) = kA$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \pm B$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x) = AB$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B} \quad (\text{ただし } B \neq 0 \text{ とする})$$

証明は数列の場合と同様である。各自こころみよ。また定義より次のことも明らかであろう。

定理 5.10 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ とする。数列 $\{a_n\}$ が $a_n \neq a$ で $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = A$

定理 [はさみうちの定理] a の回りで定義された関数 $f(x), g(x), h(x)$ に対し, a の回りで

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

が成立しているとする。 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$ のとき $f(x)$ も収束し,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

が成立する。

$x \rightarrow a$ のとき $f(x), g(x) \rightarrow 0$ あるいは $f(x), g(x) \rightarrow \pm\infty$ となる場合 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ を考えよう。数列の場合と同様に形式的には $\frac{0}{0}$ あるいは $\frac{\infty}{\infty}$ で不定であるが, 有限値に収束している場合もある。例 5.8(4) はその例になっている。微分の所で「ロピタルの定理」を扱う。この定理は不定形の極限を計算する強力な手段となる。

ここで三角関数と指数関数の微分の基礎となる 2 つの極限值をもとめよう。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (\text{変数 } x \text{ はラジアンとする}) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad (2)$$

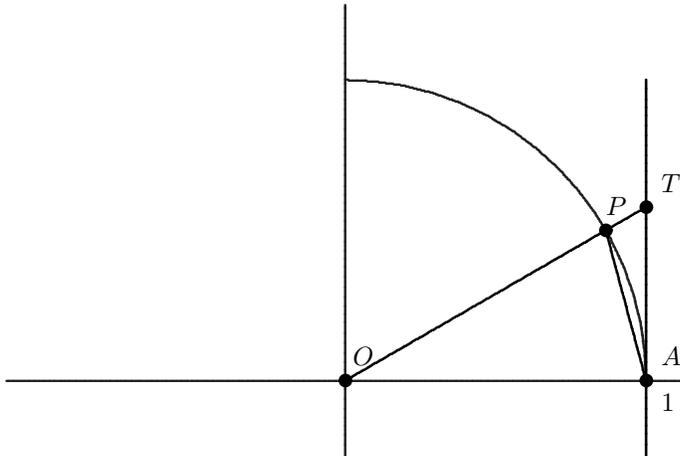


図 5.1

(1) の証明: $x > 0$ とする。図 5.1 より

$$\triangle OPA \text{ の面積} < \text{扇形 } OPA \text{ の面積} < \triangle OTA \text{ の面積}$$

である。それぞれの面積を計算すると

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \tan x$$

これより分母の 2 をはらい、逆数をとれば

$$\frac{\cos x}{\sin x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$$

よって

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$x \rightarrow 0$ のとき $\cos x \rightarrow 1$ だから (1) がわかる。

演習問題 5.6 (1) より次を示せ。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

(2) の証明: 3 段階にわけて考える。

第 1 段階: $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$ である。

$t \rightarrow \infty$ の場合; $n \leq t < n+1$ となる自然数 n をとる, $1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{t} \leq 1 + \frac{1}{n}$ より

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

となる。

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow e \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} \rightarrow e \quad (n \rightarrow \infty)$$

だから $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$

$t \rightarrow -\infty$ の場合; $u = -t$ とおく。 ($u \rightarrow +\infty$)

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t &= \left(1 - \frac{1}{u}\right)^{-u} = \left(\frac{u-1}{u}\right)^{-u} = \left(1 + \frac{1}{u-1}\right)^u \\ &= \left(1 + \frac{1}{u-1}\right)^{u-1} \left(1 + \frac{1}{u-1}\right) \rightarrow e \quad (u \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

第 2 段階: $\lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e$ である。 $u = \frac{1}{t}$ とおけば第 1 段階よりわかる。

第 3 段階: $x = \log(1+u)$ とおくと $u = e^x - 1$ より

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{u}{\log(1+u)} = \frac{1}{\log(1+u)^{\frac{1}{u}}} \rightarrow \log e = 1$$

$x \rightarrow a$ のときの $f(x)$ の極限值と $x = a$ における $f(x)$ の値が一致するとき、すなわち

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

となるとき $f(x)$ は $x = a$ で連続という。すべての点で連続のとき $f(x)$ を連続関数という。