

演習問題 5.18

- (1) $f(x) = x^2 + x + 1$ とする。(1, 3) における f のグラフの接線と法線の方程式を求めよ。
 (2) $f(x) = x(x-1)(x-2)$ のグラフに接し, $y = 2x + 1$ と平行な直線の方程式を求めよ。
 (3) 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ 上に相異なる2点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ をとったとする。この放物線の接線で, 線分 PQ に平行となるのは, どの点における接線か? その点の x 座標の値を求めよ。

- (1) $x = a$ における接線の方程式は

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

である。 $f'(x) = 2x + 1$ なので $f'(1) = 3$ である。また $f(1) = 3$ なので接線の方程式は

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 3(x - 1) + 3 = 3x$$

である。また法線は接線と直交するので法線の傾きは $-\frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{3}$ である。よって法線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{f'(1)}(x - 1) + f(1) \\ &= -\frac{1}{3}(x - 1) + 3 \\ &= -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3} \end{aligned}$$

である。

- (2) $x = a$ における接線の方程式は

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

である。この接線が $y = 2x + 1$ と平行のとき $f'(a) = 2$ が成立している。 $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ なので $f'(a) = 3a^2 - 6a + 2 = 2$ となる。これを解いて $a = 0, 2$ を得る。 $f(0) = 0, f(2) = 0$ なので $a = 0$ のとき接線の方程式は

$$y = 2x$$

$a = 2$ のときの接線の方程式は

$$y = 2x - 4$$

となる。

- (3) 線分 PQ の傾きは

$$\begin{aligned} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} &= \frac{ax_2^2 + bx_2 + c - (ax_1^2 + bx_1 + c)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + b(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= a(x_2 + x_1) + b \end{aligned}$$

となる。また

$$f'(x) = 2ax + b$$

なので接線が線分 PQ と平行となるような点の x 座標は $x = \frac{x_2 + x_1}{2}$ である。接点の座標は

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, a \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 + b \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) + c \right)$$

である。

演習問題 5.19 極大点, 極小点は臨界点であることを証明せよ。

c が関数 $y = f(x)$ の極大点とする。ある正数 δ が存在して $0 < |x - c| < \delta$ を満たす任意の x に対し $f(x) < f(c)$ が成立する。 c に十分近い x に対しては $f(x) - f(c) < 0$ が成立している。絶対値の十分小さい $h > 0$ に対しては

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} > 0$$

が成立しているので

$$f'_+(c) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

が成立する。絶対値の十分小さい $h < 0$ に対しては

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} < 0$$

が成立しているので

$$f'_-(c) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

が成立する。 $f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ が存在する必要十分条件は $f'_+(c) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$

および $f'_-(c) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ が存在して、 $f'_+(c) = f'_-(c)$ が成立することである。よって

$$0 \leq f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

より

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = 0$$

となる。よって c は臨界点である。極小値の場合も同様に証明することができる。

演習問題 5.20 以下の関数のグラフの概形を描け。

(1) $f(x) = 2x^2 - x^4$

(2) $f(x) = xe^{-x}$

(3) $f(x) = x^2 \log x$

(4) $f(x) = 3 \sin x + \sin 3x$

(5) $f(x) = x - \sqrt{1+x}$

(6) $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$

(7) $f(x) = x + 2 \cos x$

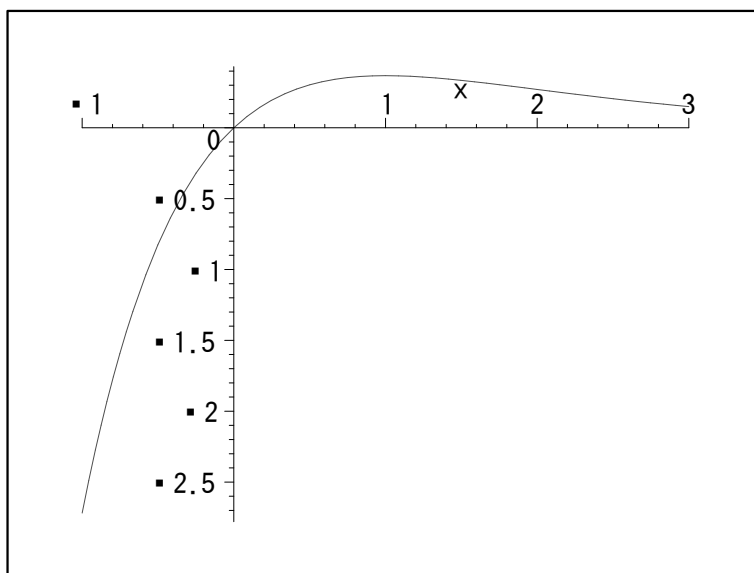
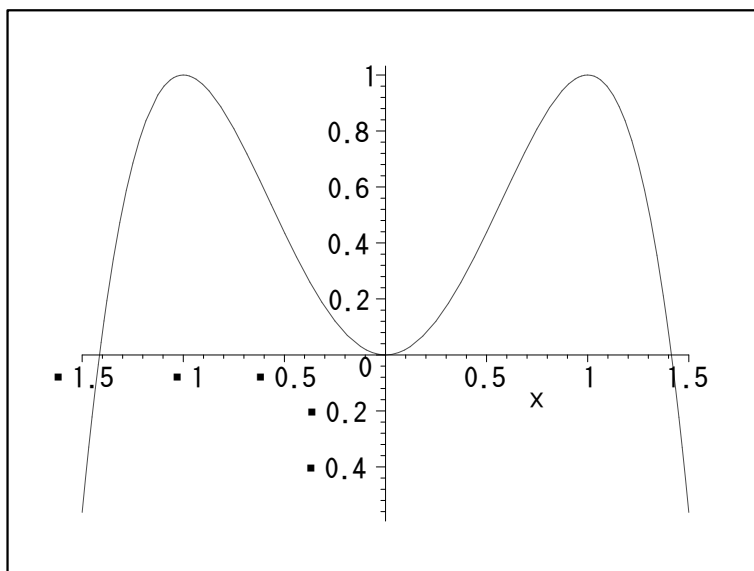
(8) $f(x) = \sin x(1 + \cos x)$

(9) $f(x) = x^{-x^2}$

(1) $f'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1 - x^2) = 4x(1 - x)(1 + x)$ なので $f'(x) = 0$ となるのは $x = -1, 0, 1$ である。増減表は次のようになる。

x		-1		0		1	
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	↗	1	↘	0	↗	1	↘

$f(x) = 2x^2 - x^4 = 0$ を解くと $x = 0, \pm\sqrt{2}$ となる。よって曲線は x 軸と 3 点で交わっている。
($x = 0$ は重解なので接している。) このことに注意して概形を描くと次図のようになる。変換に問題があって以下のグラフの中のマイナス (-) が黒点に変わっています。注意を。



(2) $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$ なので $f'(x) = 0$ となるのは $x = 1$ のときのみである。増減表は次のようになる。

x		1	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	e^{-1}	↘

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ および $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ということに注意してグラフを描くと前図のようになる。

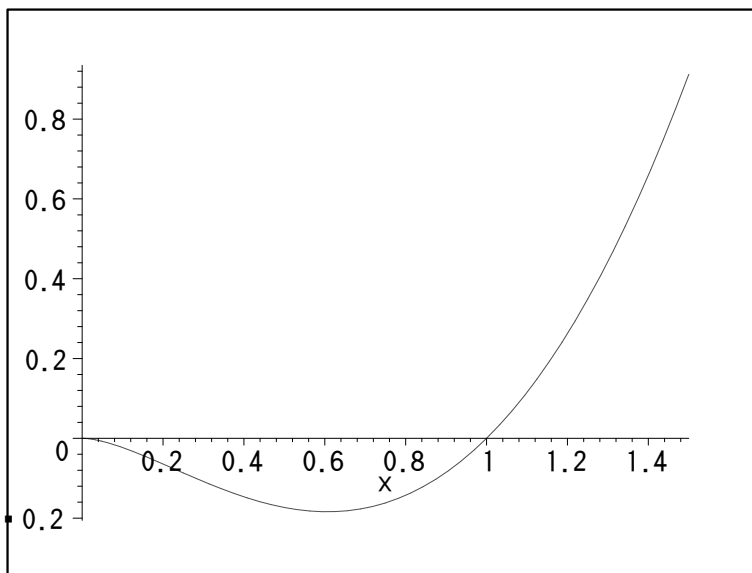
(3) $\log x$ が定義されるのは $x > 0$ なので $f(x)$ の定義域も $x > 0$ である。 $f'(x) = 2x \log x + x^2 \frac{1}{x} = x(2 \log x + 1) = 0$ を解いて、 $x = \sqrt{\frac{1}{e}}$ を得る。よって増減表は次の様になる。

x		$\sqrt{\frac{1}{e}}$	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{2e}$	↗

$x \rightarrow +0$ としたときの関数の挙動を調べる。ここでは後で学ぶロピタルの定理を用いる。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} x^2 \log x &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +0} x^2 = 0 \end{aligned}$$

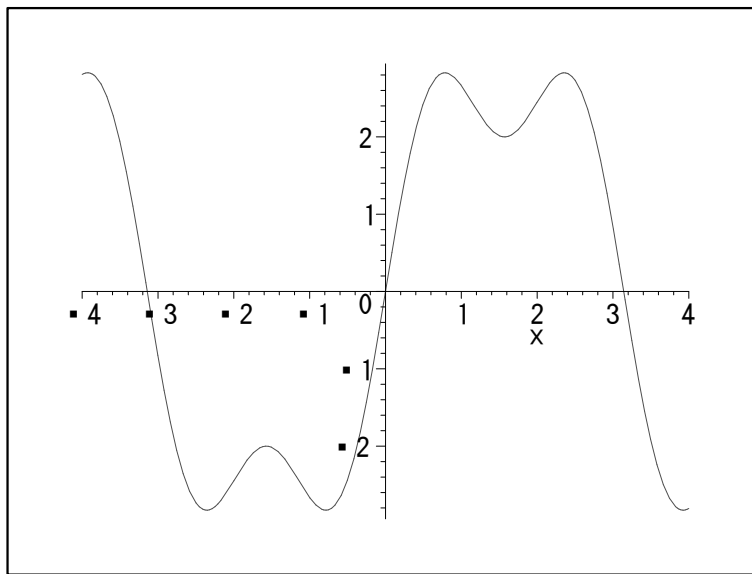
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ であり、また $f(x) = 0$ となるのは $x = 1$ のときのみである。このことに注意してグラフを描くと次図の様になる。



(4) $\sin x$ は周期 2π の周期関数であり, $\sin 3x$ は周期 $\frac{2\pi}{3}$ の周期関数である。よって $-\pi \leq x \leq \pi$ の範囲でグラフを描き, それを x 軸の方向へ $2n\pi$ (n は整数) 平行移動したグラフが求めるグラフとなる。よって $-\pi \leq x \leq \pi$ の範囲で調べる。

$f(x) = 3 \cos x + 3 \cos 3x = 3 \cos x + 3(4 \cos^3 x - 3 \cos x) = 6 \cos x(2 \cos^2 x - 1) = 0$ となるのは $\cos x = 0$ または $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ なので, $-\pi \leq x \leq \pi$ の範囲では $x = -\frac{3}{4}\pi, -\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi$ である。よって増減表は次のようになる。

x		$\frac{3}{4}\pi$		$-\frac{1}{2}\pi$		$-\frac{1}{4}\pi$		$\frac{1}{4}\pi$		$\frac{1}{2}\pi$		$\frac{3}{4}\pi$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	\searrow	$-\frac{4}{\sqrt{2}}$	\nearrow	-2	\searrow	$-\frac{4}{\sqrt{2}}$	\nearrow	$\frac{4}{\sqrt{2}}$	\searrow	2	\nearrow	$\frac{4}{\sqrt{2}}$	\searrow



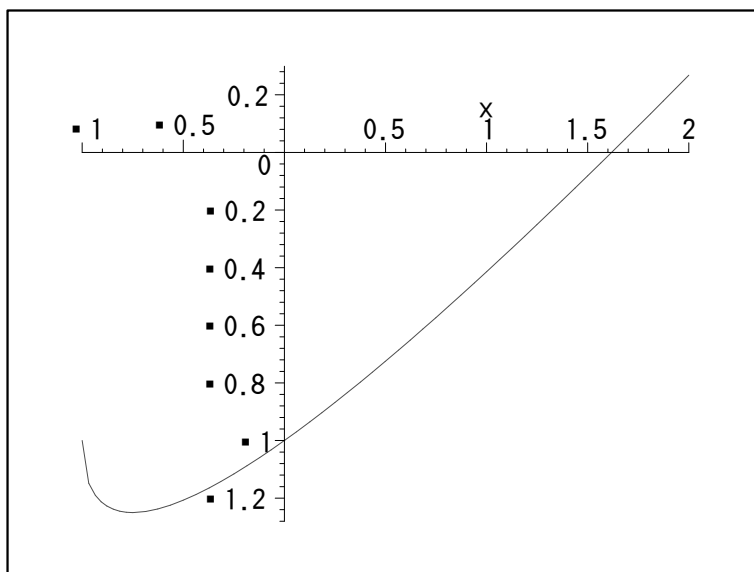
(5) $f(x) = x - \sqrt{1+x}$ は $1+x \geq 0$ で定義されている。 $f'(x) = 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ なので $f'(x) = 0$ より $x = -\frac{3}{4}$ となる。

x		$-\frac{3}{4}$	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\searrow		\nearrow

$f(x) = 0$ とすると $x - \sqrt{1+x} = 0$ より $x = \sqrt{1+x}$ となる。両辺を 2 乗して

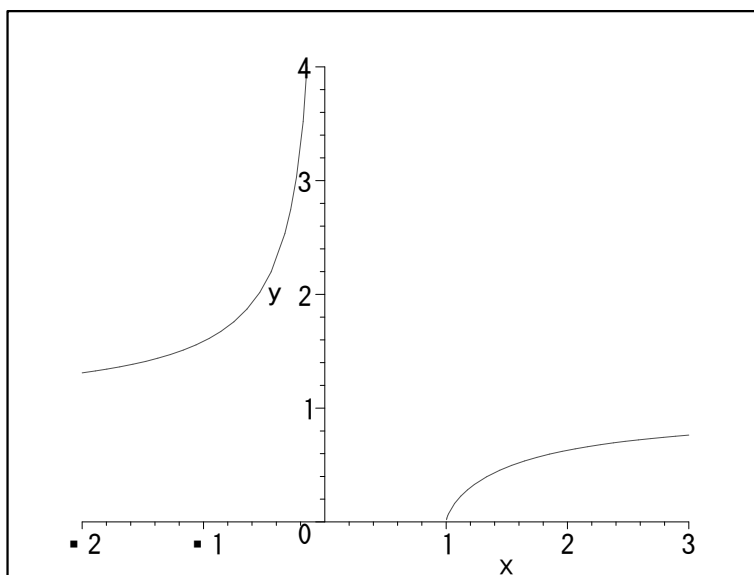
$$x^2 = 1+x$$

を得る。この 2 次方程式の解は $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ である。しかし $x = \sqrt{1+x} \geq 0$ より $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ は不適である。また $f(0) = 0 - \sqrt{1+0} = -1$ である。以上のことに注意してグラフを描くと次図のようになる。



(6) $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$ なので $1 - \frac{1}{x} \geq 0$ が必要である。 $x \geq 0$ のときは $1 \geq \frac{1}{x}$ より $x \geq 1$

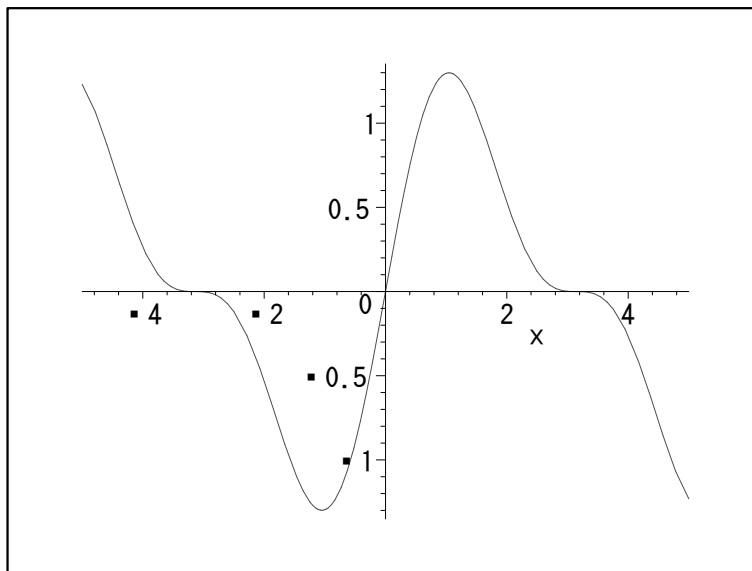
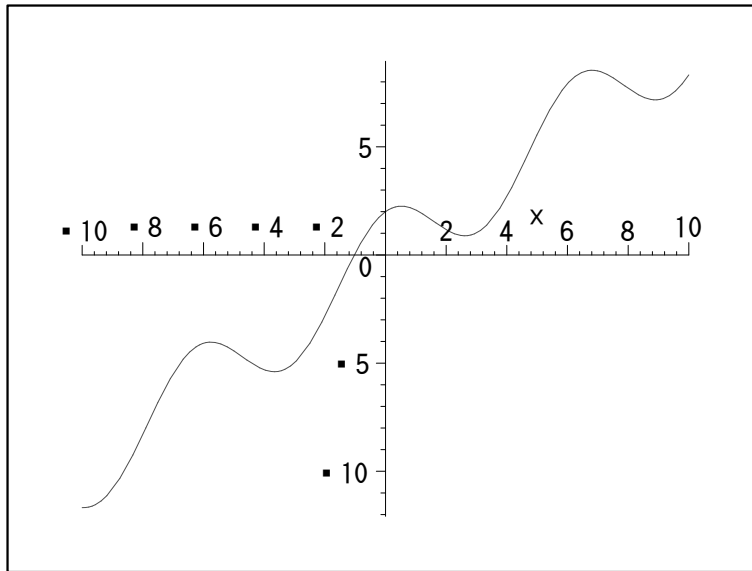
である。 $x < 0$ のときは常に $1 - \frac{1}{x} \geq 0$ である。 $f'(x) = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{1}{x^2}$ $x = 1$ においては微分可能ではない。 それ以外では $f'(x) > 0$ である。 $\lim_{h \rightarrow -0} f(x) = \infty$ ということに注意してグラフを描くと次図のようになる。



(7) $f(x) = x + 2 \cos x$ なので $f'(x) = 1 - 2 \sin x$ である。 $f'(x) = 0$ となるのは $2n\pi + \frac{\pi}{6}, 2n\pi + \frac{5\pi}{6}$

(n は整数) である。増減表とグラフは次のようになる。

x		$2n\pi + \frac{\pi}{6}$		$2n\pi + \frac{5\pi}{6}$		$2(n+1)\pi + \frac{\pi}{6}$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	↗	$2n\pi + \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$	↘	$2n\pi + \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$	↗	$2(n+1)\pi + \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$	↘



(8) $f(x)$ は周期 2π の周期関数なので $-\pi \leq x \leq \pi$ の範囲で考える。 $f'(x) = \cos x(1 + \cos x) - \sin^2 x = \cos + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = (2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$ とすると、 $\cos x + 1 = 0$ または $2\cos x - 1 = 0$ である。 $\cos x + 1 = 0$ のとき $x = -\pi, \pi$ である。 $2\cos x - 1 = 0$

のとき $x = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$ である。増減表は次のようになるので、グラフは前図のようになる。

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	-	0	+	0	-	0
$f(x)$	0	\searrow	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	\nearrow	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	\searrow	0

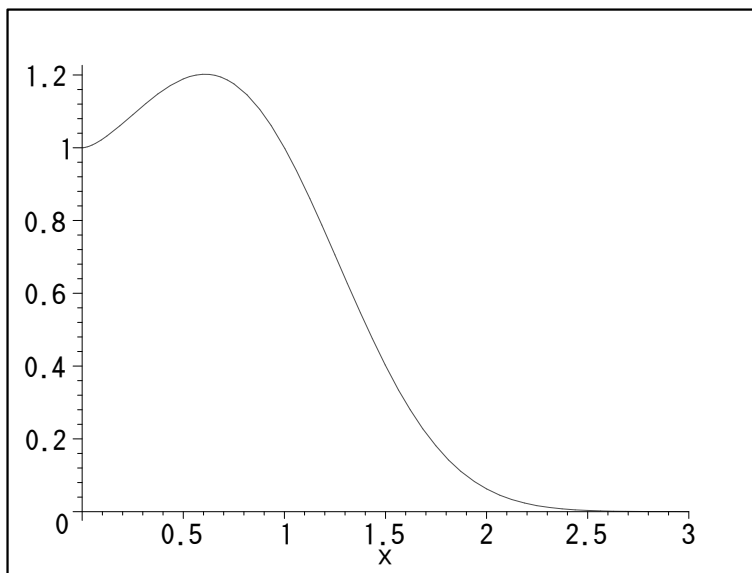
(9) $f(x) = x^{-x^2}$ なので定義域は $x > 0$ である。導関数を求めるのに対数微分法を用いる。 $y = x^{-x^2}$ とすると $\log y = -x^2 \log x$ である。両辺を x で微分すると $\frac{1}{y} y' = -2x \log x - x^2 \frac{1}{x} = -2x \log x - 1$ なので $y' = -x \cdot x^{-x^2} (2 \log x + 1)$ となる。 $f'(x) = 0$ とすると、 $2 \log x + 1 = 0$ なので $x = e^{-\frac{1}{2}}$ となる。増減表は

x		$e^{-\frac{1}{2}}$	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	\nearrow	$f(e^{-\frac{1}{2}})$	\searrow

となる。 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ である。また $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ を求める。 $\log y = -x^2 \log x$ の極限を求める。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \log f(x) &= \lim_{x \rightarrow +0} (-x^2 \log x) = - \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x^2}} \\ &= - \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = - \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-2 \frac{1}{x^3}} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +0} x^2 = 0 \end{aligned}$$

なので、 $0 = \lim_{x \rightarrow +0} \log f(x) = \log \left(\lim_{x \rightarrow +0} f(x) \right)$ となる。よって $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1$ となる。以上を考慮してグラフを書くと次図のようになる。



演習問題 *5.21 $x_1, x_2 \in [a, b]$ に対し $F(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1) - f(x)$ とおき、 $F(x)$ の正負を調べることにより命題 5.19 を証明せよ。

$f''(x) < 0$ の場合も同様のできるので、 $f''(x) > 0$ の場合のみ証明する。 $x_1 < x_2$ としても一般性を失わないので、この場合を考える。

$$\begin{aligned} F(x_1) &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_1 - x_1) + f(x_1) - f(x_1) \\ &= f(x_1) - f(x_1) = 0 \\ F(x_2) &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1) + f(x_1) - f(x_2) \\ &= f(x_2) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_2) = 0 \end{aligned}$$

が成立しているので、 $F(x)$ の $[x_1, x_2]$ における最大値、または最小値を与える x_3 で $x_1 < x_3 < x_2$ となるものが存在する。このとき $x = x_3$ で $F(x)$ は極大または極小なので $F'(x_3) = 0$ が成立している。 $F''(x) = -f''(x) < 0$ なので $F'(x)$ は $[x_1, x_2]$ で単調減少である。よって $F'(x)$ の $[x_1, x_2]$ における増減表は次のようになっている。

x	x_1		x_3		x_2
$F''(x)$		-		-	
$F'(x)$		\searrow	0	\searrow	

よって (x_1, x_3) において $F'(x) > 0$ 、 (x_3, x_2) において $F'(x) < 0$ である。よって $F(x)$ の増減表は次のようになっている。

x	x_1		x_3		x_2
$F'(x)$		+	0	-	
$F(x)$	0	\nearrow		\searrow	0

よって (x_1, x_2) において $F(x) > 0$ となるので

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1) > f(x)$$

が成立し、上に凸であることが示された。

演習問題 5.22 次の関数のグラフの凹凸を調べ概形を描け。

$$\begin{aligned} (1) \quad y &= (x-5)^4(x+1)^3 & (2) \quad y &= \frac{x^2+1}{x} \\ (3) \quad y &= e^{-x^2} & (4) \quad y &= x \log x \end{aligned}$$

(1)

$$\begin{aligned} y' &= 4(x-5)^3(x+1)^3 + 3(x-5)^4(x+1)^2 \\ &= (x-5)^3(x+1)^2\{4(x+1) + 3(x-5)\} \\ &= (x-5)^3(x+1)^2(7x-11) \end{aligned}$$

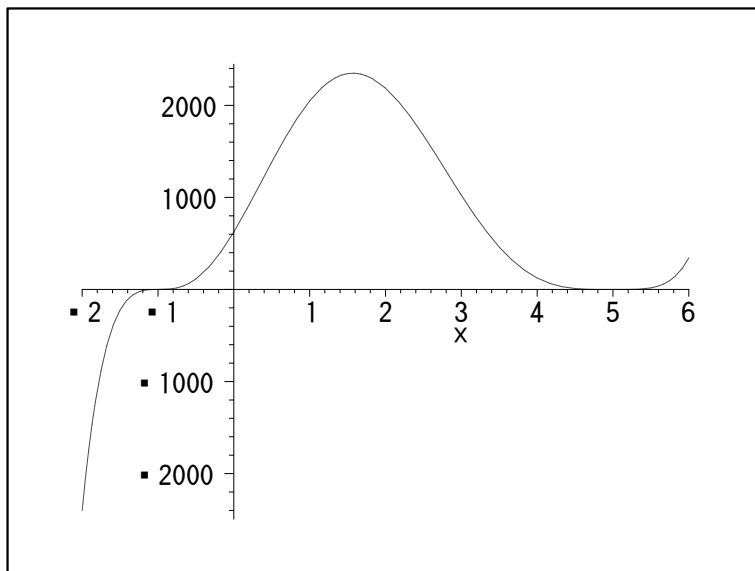
なので $y' = 0$ を解いて $x = -1, 5, \frac{11}{7}$ を得る。

$$\begin{aligned} y'' &= \text{ここに書いてあった式は間違い} \\ &= 6(x-5)^2(x+1)(7x^2-22x+7) \end{aligned}$$

なので $y'' = 0$ を解いて $x = -1, 5, \frac{11+6\sqrt{2}}{7}, \frac{11-6\sqrt{2}}{7}$ を得る。よって増減表は次の様になる。

x		-1		$\frac{11-6\sqrt{2}}{7}$		$\frac{11}{7}$		$\frac{11+6\sqrt{2}}{7}$		5	
y'	+	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
y''	-	0	+	0	-	-	-	0	+	+	+
y	↖		↗		↗		↘		↘		↗

x 軸との交点は $y = 0$ を解いて $x = -1, 5$ である。 y 軸との交点は y に $x = 0$ を代入して $(-5)^4 = 5^4$ である。以上を考慮してグラフの概形を描くと次のようになっている。



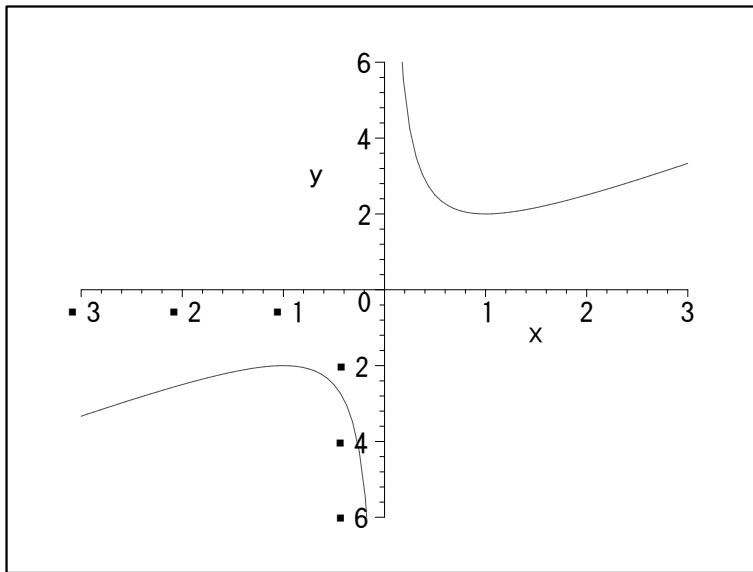
(2) $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$ なので $y' = 0$ を解いて $x = -1, 1$ を得る。 $y'' = \frac{2}{x^3}$ なので増減表は次の様になる。

x		-1		0		1	
y'	+	0	-	×	-	0	+
y''	-	-	-	×	+	+	+
y	↖		↘	×	↘		↗

グラフは x 軸とも y 軸とも交わらない。

$$\lim_{x \rightarrow +0} y = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} y = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$$

なのでグラフの概形は次のようになる。



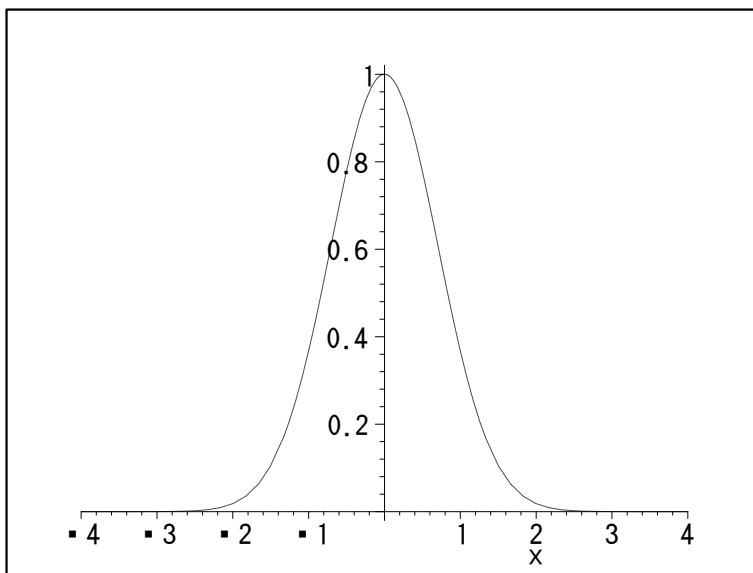
(3) $y' = -2e^{-x^2}$ なので $y' = 0$ を解いて $x = 0$ を得る。 $y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$ なので $y'' = 0$ を解いて $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ を得る。よって増減表は次の様になる。

x		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
y'	+	+	+	0	-	-	-
y''	+	0	-	-	-	0	+
y	↗		↗		↘		↘

グラフは x 軸とは交わらない。 y 軸との交点は $y = 0$ である。また

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$$

なのでグラフの概形は次のようになる。



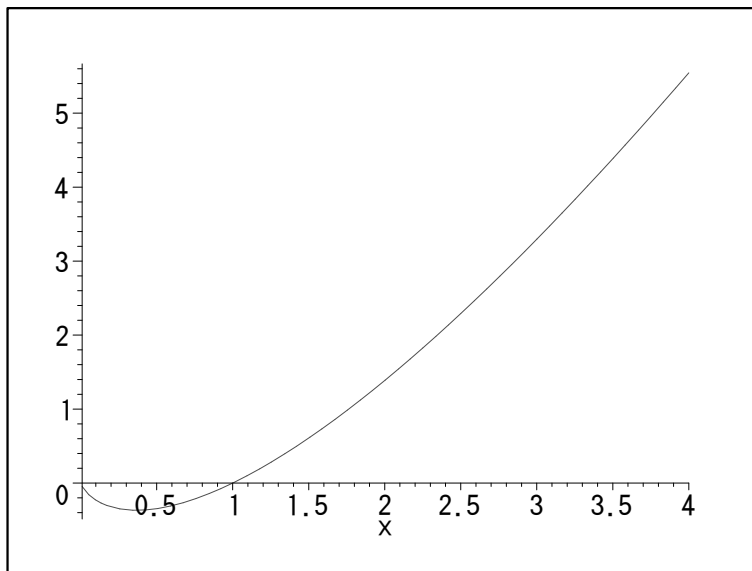
(4) $y' = \log x + 1$ なので $y' = 0$ を解いて $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ を得る。 $y'' = \frac{1}{x}$ なので $y'' = 0$ となる x は存在しない。よって増減表は次の様になる。

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
y'	×	-	0	+
y''	×	+	+	+
y		↘		↗

x 軸との交点は $x = 1$ であり、 y 軸とは交わらない。また $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$ である。この後学んだロピタルの定理を用いると

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} x \log x &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow +0} x = 0 \end{aligned}$$

が分かる。以上からグラフの概形は次のようになっている。



演習問題 5.23 次のようにパラメータ表示された曲線の概形を書け。

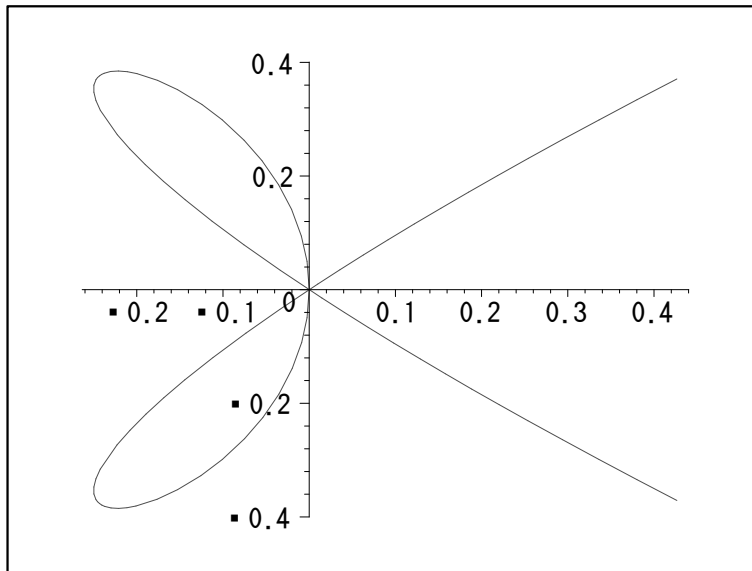
(1) $x = x(t) = t^4 - t^2, y = y(t) = t^3 - t$

(2) $x = x(t) = t - t^3, y = y(t) = 1 - t^4$

(1) $x'(t) = 4t^3 - 2t = 2t(2t^2 - 1) = 0$ より $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。 $y'(t) = 3t^2 - 1 = 0$ より $t = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ となる。増減表を書くと

t		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$x'(x)$	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$x(x)$	←	$-\frac{1}{4}$	→	$-\frac{2}{9}$	→	0	←	$-\frac{2}{9}$	←	$-\frac{1}{4}$	→
$y'(t)$	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$y(t)$	↑	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	↑	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↓	0	↓	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↑	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$	↑
曲線	↖	↑	↗	→	↘	↓	↙	←	↖	↑	↗

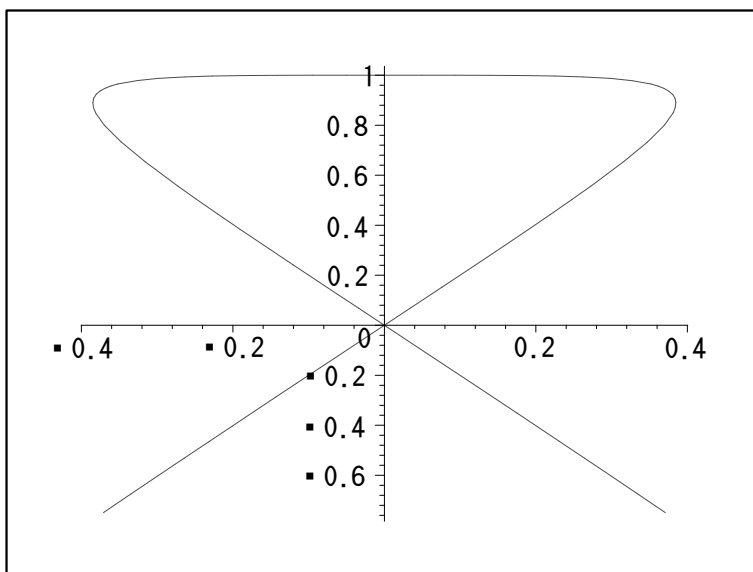
となる。 x 軸との交わりは $y(t) = 0$ を解いて $t = -1, 0, 1$, y 軸との交わりは $x(t) = 0$ を解いて $t = -1, 0, 1$ であり、この点はいずれも原点である。これを元に曲線を描くと次図のようになる。



(2) $x'(t) = 1 - 3t^2 = 0$ より $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ となる。 $y'(t) = -4t^3 = 0$ より $t = 0$ となる。 $x(t) = 0$ を解くと $t = -1, 0, 1$ となる。 y 軸との交点は $(x(-1), y(-1)) = (0, 0)$, $(x(0), y(0)) = (0, 1)$, $(x(1), y(1)) = (0, 0)$ である。 $y(t) = 0$ を解くと $t = -1, 1$ である。増減表を書くと

t		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
$x'(x)$	-	0	+	+	+	0	-
$x(t)$	←	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	→	0	→	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	←
$y'(t)$	+	+	+	0	-	-	-
$y(x)$	↑	$\frac{8}{9}$	↑	1	↓	$\frac{8}{9}$	↓
曲線	↖	↑	↗	→	↘	↓	↙

となる。これを元に曲線を描くと次図のようになる。



演習問題 5.24 以下の極限值を求めよ。

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3}$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\log(1+x)}$ (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos(\alpha x)}{\log \cos(\beta x)}$
(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$ ($a, b > 0$) (5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{e^x}$ (6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1+3^x)}{x}$
(7) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right)$ (8) $\lim_{x \rightarrow 0} x \log x$ (9) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$
(10) $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$ (11) $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{1}{x}}$ (12) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$

(1)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - x \cos x)'}{(x^3)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{3x^2} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\log(1+x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x})'}{(\log(1+x))'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\frac{1}{1+x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)(e^x + e^{-x}) = 2 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos(\alpha x)}{\log \cos(\beta x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\log \cos(\alpha x))'}{(\log \cos(\beta x))'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos(\alpha x)} \cdot (-\sin(\alpha x)) \cdot \alpha}{\frac{1}{\cos(\beta x)} \cdot (-\sin(\beta x)) \cdot \beta} \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\beta x)}{\cos(\alpha x)} \cdot \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)} \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\beta x)}{\cos(\alpha x)} \cdot \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x} \cdot \frac{\beta x}{\sin(\beta x)} \cdot \frac{\beta}{\alpha} \\ &= \frac{\alpha^2}{\beta^2}\end{aligned}$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a^x - b^x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} (\log a \cdot a^x - \log b \cdot b^x) = \log a - \log b$$

(5)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{e^x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^5)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4}{e^x} = 5 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^4)'}{(e^x)'} = 5 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3}{e^x} \\ &= 20 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^3)'}{(e^x)'} = 20 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{e^x} = 60 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} = 60 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} \\ &= 120 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = 120 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1+3^x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log(1+3^x))'}{x'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+3^x} \log 3 \cdot 3^x \\ &= \log 3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{1+3^x} = \log 3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{3^x} + 1} \\ &= \log 3\end{aligned}$$

(7)

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} = \frac{1}{x^2} - \frac{\cos x}{x \sin x} = \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sin x} = \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \cdot \frac{x}{\sin x}$$

となるので (3) の結果を用いる。

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \cdot \frac{x}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

(8)

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow +0} x = 0$$

(9) $t = \frac{1}{x}$ とおくと $x \rightarrow \infty$ のとき $t \rightarrow +0$ である。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t} \sin t = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

(10) $y = x^x$ に対し $\log y = x \log x$ である。

$$\lim_{x \rightarrow +0} \log y = \lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$$

が成立している。ここで (8) の結果を用いた。 $\log x$ は単射であり、連続関数なので

$$\log 1 = 0 = \lim_{x \rightarrow +0} \log y = \log \left(\lim_{x \rightarrow +0} y \right)$$

より $\lim_{x \rightarrow +0} y = 1$ となる。

(11) $0 < a < b$ かつ $X > 0$ に対し $a^X < b^X$ が成立する。 x が 0 に近づくとき $x < \frac{1}{2}$ としてよ

い。 $0 < x < \frac{1}{2}$ かつ $\frac{1}{x} > 0$ なので $0 < x^{\frac{1}{x}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ となる。 $x \rightarrow +0$ のとき $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$ なので $0 \leq \lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{1}{x}} \leq \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = 0$ なので $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{1}{x}} = 0$ である。

(12) $y = \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ なので $\log y = \log \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \log \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)$ となる。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \log y &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\log \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)\right)'}{x'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{a^x + b^x}{2}} \left(\frac{a^x \log a + b^x \log b}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \log a + b^x \log b}{a^x + b^x} \\ &= \frac{\log a + \log b}{2} = \frac{1}{2} \log ab = \log(ab)^{\frac{1}{2}} = \log \sqrt{ab} \end{aligned}$$

が成立する。 $\log x$ は単射であり、連続なので $\lim_{x \rightarrow 0} y = \sqrt{ab}$ となる。即ち

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt{ab}$$

となる。