数学序論要綱 #3　　2009–4–27　　河野

1.3　必要条件と十分条件

$P \implies Q$ が**正しい命題**であるとき Q を P(であるため) の**必要条件** (*necessary condition*) であるという。また P は Q(であるため) の**十分条件** (*sufficient condition*) という。

$P \implies Q$ と $Q \implies P$ が共に正しいとき P は Q の必要条件でもあり十分条件でもある。このとき P は Q の**必要十分条件** (*sufficient and necessary condition*) であるという。このとき Q も P の必要十分条件である。

$P \implies Q$ が真であり，$Q \implies P$ が偽であるとき，P は Q の十分条件であるが，必要条件ではない。このとき Q は P の必要条件ではあるが，十分条件ではない。

$P \implies Q$ と $Q \implies P$ が共に正しくないとき P は Q の必要条件でも，十分条件でもない。このとき Q も P の必要条件でも，十分条件でもない。

実際の議論の中では論理を自覚的に意識していないと混乱する場合も多い。必要条件の十分条件は元の命題と何の関係もない。このことは次の図式

$$P \implies Q \impliedby R$$

考えると分かる。P, R を勝手な命題し，Q を正しい命題 (例えば「$1 = 1$」) とすると，$P \implies Q$ も $R \implies Q$ も成立する。Q は P の必要条件であり，R は Q の十分条件なので，R は P の必要条件の十分条件であるが，P と R の間には何の関係もない。このことは十分条件の必要条件

$$P \impliedby Q \implies R$$

でも同様である。この場合は Q として偽である命題 (例えば「$1 \neq 1$」) を採用すればよい。

必要条件・十分条件を判定するときに，複雑なものに対して真理表を使って解くという方法が考えられる。次の問題で考えてみよう (見覚えのある人もいるかもしれない)。

問題： 実数 x, y に対して、「 $x \neq 0$ かつ $y \neq 0$ 」は $(x, y) \neq (0, 0)$ であるための

$\boxed{}$

P を「$x = 0$」，Q を「$y = 0$」，R を「$(x, y) = (0, 0)$」と書く。X を「$x \neq 0$ かつ $y \neq 0$」とすると，X は「$\neg P \wedge \neg Q$」である。また Y を「$(x, y) \neq (0, 0)$」とすると Y は「$\neg R$」である。真理表を書くと下記のようになる。ここで $(x, y) = (0, 0) \iff (x = 0 \wedge y = 0)$ すなわち $R \iff P \wedge Q$ が真理表を書くポイントとなる。

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$X = \neg P \wedge \neg Q$	R	$Y = \neg R$	$X \implies Y$	$Y \implies X$
T	T	F	F	F	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	F	T	T	F
F	F	T	T	T	F	T	T	T

真理表により $X \implies Y$ は成立するが，$Y \implies X$ は成立しないことが分かる。よって X は Y であるための「十分条件だが必要条件ではない」が答えとなる。

問題： 実数 x, y に対して、「 $x = 0$ でなく、かつ $y = 0$ でない」は $xy = 0$ でないための $\boxed{}$ (これは見覚えがあるでしょう。)

P を「$x=0$」，Q を「$y=0$」，R を「$xy=0$」と書く。X を「$x=0$ でなくかつ $y=0$ でない」とすると，X は「$\neg P \wedge \neg Q$」である。また Y を「$xy=0$ でない」とすると Y は「$\neg R$」である。真理表を書くと下記のようになる。

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$X = \neg P \wedge \neg Q$	R	$Y = \neg R$	$X \implies Y$	$Y \implies X$
T	T	F	F	F	T	F	T	T
T	F	F	T	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	F	T	T
F	F	T	T	T	F	T	T	T

真理表により $X \implies Y$，$Y \implies X$ ともに成立することが分かる。よって X は Y であるための「必要条件かつ十分条件 (または必要十分条件) である」が答えとなる。

演習問題 1.10　次において X は Y の， 1) 必要十分条件，2) 必要条件ではあるが十分条件ではない，3) 十分条件ではあるが必要条件ではない，4) 必要条件でも十分条件でもない，のいずれかであるか決定せよ。ここで x, y は実数とする。

(1) $X: x^2 = 1, \quad Y: x = 1$

(2) $X: xy > 0, \quad Y: x > 0$ かつ $y > 0$

(3) $X: xy > 0, \quad Y: x > 0$ または $y > 0$

(4) $X: xy = 0, \quad Y: x = 0$ かつ $y = 0$

(5) $X: xy = 0, \quad Y: x = 0$ または $y = 0$

(6) $X: x = 1$ でないかまたは $y = 1, \quad Y: xy = 1$

(7) $X: xy = 0$ かつ $y = x + 1, \quad Y: x = 0$ かつ $y = 1$

(8) $X: x^2 + 2x - 1 = 0$ かつ $x > 0, \quad Y: x = -1 + \sqrt{2}$

ここで論理の実際的練習として高次連立方程式を解くことを考える。高次連立方程式は 2 変数関数の極値問題(1)を考えるときに必要になる。演習問題も極値問題から採用した。次の連立方程式

$$y(1 - 2x^2 - y^2) = 0, \qquad x(1 - x^2 - 3y^2) = 0$$

を解くことを考える。$\alpha \times \beta = 0$ という式が成立するためには $\alpha = 0$ または $\beta = 0$ が成立していればよい。すでに学んだ用語を用いると $\alpha \times \beta = 0$ である必要十分条件は $\alpha = 0$ または $\beta = 0$ である。最初の式が成立する必要十分条件は $y = 0$ または $1 - 2x^2 - y^2 = 0$ である。$y = 0$ という命題を Y，$1 - 2x^2 - y^2 = 0$ という命題を A とすると $Y \vee A$ である。2 番目の式が成立する必要十分条件は $x = 0$ または $1 - x^2 - 3y^2 = 0$ である。$x = 0$ という命題を X，$1 - x^2 - 3y^2 = 0$ と

(1)後期に解析学 I で扱う。

いう命題を B とすると $X \vee B$ である。2 つの式が共に成立しているので，成立のための条件は

$$\begin{aligned}(Y \vee A) \wedge (X \vee B) &= ((Y \vee A) \wedge X) \vee ((Y \vee A) \wedge B) \\ &= (Y \wedge X) \vee (A \wedge X) \vee (Y \wedge B) \vee (A \wedge B)\end{aligned}$$

となる。よって $Y \wedge X$，$A \wedge X$，$Y \wedge B$，$A \wedge B$ の 4 つの場合を考えればよいことがわかる。

最初は $Y \wedge X$ の場合を考える。このとき Y は $y = 0$ を意味し，X は $x = 0$ を意味するので，解として $x = 0$ かつ $y = 0$，すなわち $(x, y) = (0, 0)$ を得る。

次に $A \wedge X$ の場合を考える。このとき A は $1 - 2x^2 - y^2 = 0$ を X は $x = 0$ を意味する。$x = 0$ を $1 - 2x^2 - y^2 = 0$ に代入すると，$y^2 = 1$ となる。よって $y = 1$ または $y = -1$ であり，このときの解は $(x, y) = (0, 1)$ または $(x, y) = (0, -1)$ である。これを $(x, y) = (0, \pm 1)$ と書くこともある。

次に $Y \wedge B$ の場合を考える。このとき $y = 0$ かつ $1 - x^2 - 3y^2 = 0$ が成立している。$y = 0$ を $1 - x^2 - 3y^2 = 0$ に代入すると，$x^2 = 1$ となる。よって $x = 1$ または $x = -1$ であり，このときの解は $(x, y) = (\pm 1, 0)$ となる。

最後に $A \wedge B$ の場合を考える。$1 - 2x^2 - y^2 = 0$ かつ $1 - x^2 - 3y^2 = 0$ が成立している。1 番目の式から 2 番目の式を引くと $-x^2 + 2y^2 = 0$ を得る。$x = \sqrt{2}y$ または $x = -\sqrt{2}y$ となるので，これをそれぞれ 2 番目の式に代入すると，$1 - 5y^2 = 0$ となり，それぞれの場合に $y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ または $y = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ を得る。よって $(x, y) = \left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ または $(x, y) = \left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ となる。

以上により連立方程式の解は

$$(x, y) = (0, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, 0), \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

である。

ここで改めて確認しておくが，(x, y) が連立方程式

$$y(1 - 2x^2 - y^2) = 0, \qquad x(1 - x^2 - 3y^2) = 0$$

を満たすことの必要十分条件は

$$(x, y) = (0, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, 0), \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

である[2]。

連立方程式を解くということは，このような形の必要十分条件を求めることを意味する。解の一部を求めたのでは必要十分条件にはならず，すべての解を求めて初めて必要十分条件が得られることは強調しておきたい。

いろんな論証の多くは必要十分条件を求めることなので「知識」としての必要十分条件ではなく，実際に論証に使えることが重要である。実際の論証・計算においては 1 つ 1 つのステップで必要十分をチェックするのは現実的でない場合も多い。その場合は $P_1 \Longrightarrow P_2$，$P_2 \Longrightarrow P_3 \cdots$ と

[2] ここではチェックなしに「必要十分条件である」と述べたが，これは計算間違いをしていないことを前提にしている。実際の計算の場合，求まった解を最初の連立方程式に代入して成立することをチェックすることを強く推奨する。求めた解が元の方程式を満たさないときは，どこかで間違いをおかしたことを意味するし，満たしていれば，少なくとも「求めた解は正しい」ことが分かる。

必要条件を求める連鎖を実行して,「結論らしきもの」が出た段階で,「結論らしきもの」から最初の条件が出てくるかをチェックすることが多い。連立方程式を解いて得られた「解らしきもの」を最初の方程式に代入するのも，このことを実行していると考えられる。

演習問題 1.11　次の連立方程式の解を求めよ。
(1) $x(x^2+y^2)=0$ かつ $y(x^2+y^2-1)=0$
(2) $x^3-x+y=0$ かつ $y^3+x-y=0$
(3) $(y-2x^2y)2^{-x^2-y^2}=0$ かつ $(x-2xy^2)2^{-x^2-y^2}=0$