

1.4 数学的帰納法

自然数 n に対する命題 $P(n)$ を証明する方法として数学的帰納法がある。『すべての自然数 n に対し $P(n)$ が成立する』という命題を証明するために

(1) $P(1)$ が正しいことを示す。

(2) $P(k)$ の成立を仮定して $P(k+1)$ の成立を示す。

の 2 つを示す, という論法である。将棋倒し (最近はドミノ倒しの方が通りがよいか) を考えてみれば, この論法が成立することは見やすいであろう。この将棋倒しは一列に並んでいて分岐などはないものを想定する。

将棋が倒れる = 命題が正しい

と考えれば, (1) 最初の将棋が倒れることと, (2) 前の将棋が倒れば次の将棋が倒れることの 2 つが分かるなら, 「将棋はすべて倒れる」と考えてよいであろう。勿論将棋は有限であり, 自然数は無限であるという違いがあるが, 直感的には受け入れやすい論法であろう。

例を考える。次の命題を $P(n)$ とする。

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$n = 1, 2$ 等を代入すると成立しているが, それだけでは証明にはならない。そこで数学的帰納法を用いて証明を試みる。そのためには (1) : $P(1)$ の成立, および (2) : $P(k) \implies P(k+1)$ の成立を示せばよい。

(1) $P(1)$ の式の左辺は自然数を 1 から 1 まで加えるという意味なので, 1 である。右辺は $\frac{1(1+1)}{2} = 1$ となり, $1 = 1$ なので $P(1)$ は正しい。

(2) $P(k)$ の成立を仮定して $P(k+1)$ の成立を示す。今 $P(k)$ が成立しているとする

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

が成立している。この式の両辺に $k+1$ を加えると

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{(k+1)(k+1+1)}{2} \end{aligned}$$

となる。この式は $P(k+1)$ の成立を意味しているので, 数学的帰納法によりすべての自然数 n に対して $P(n)$ が成立することが示された。

数学的帰納法で証明するためには証明すべき命題が明らかになっている必要がある。そうでない場合は他の方法で証明すべき命題を予想する必要がある。例として $a_1 = 1$ であり $n = 1, 2, \dots$ に対しては

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$$

で定義された数列 $\{a_n\}$ に対し, a_n の一般項を数学的帰納法で求めることを考える。 a_2, a_3, a_4 を計算すると

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{a_1}{a_1+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \\ a_3 &= \frac{a_2}{a_2+1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} \\ a_4 &= \frac{a_3}{a_3+1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となっているので $a_n = \frac{1}{n}$ と予想される。そこで命題 $P(n)$ を

$$P(n) : a_n = \frac{1}{n}$$

として数学的帰納法で証明する。

- (1) $P(1)$ は $a_1 = \frac{1}{1} = 1$ なのでこれは正しい。
- (2) $P(k)$ の成立を仮定する。すなわち $a_k = \frac{1}{k}$ とする。このとき

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{a_k+1} = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}+1} = \frac{1}{1+k}$$

なので $P(k+1)$ も成立している。よって数学的帰納法により証明された。

演習問題 1.12 次の命題を数学的帰納法により証明せよ。ただし n は自然数とする。(5) においては積の導関数の公式 $[(f(x)g(x))]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ を使用してよい。

- (1) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- (2) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
- (3) $n(n^2+2)$ は 3 で割り切れる。
- (4) $h \geq 0$ のとき $(1+h)^n \geq 1+nh$ である。
- (5) $y = x^n$ の導関数は $y' = nx^{n-1}$ である。

数学的帰納法には、本質的には同じであるが一見異なるいくつかの「変種」がある。

(A) 最初の「変種」は数学的帰納法の

- (1) $P(1)$ が正しいことを示す。
- (2) $P(k)$ の成立を仮定して $P(k+1)$ の成立を示す。

を変更して

- (1) $P(k_0)$ が正しいことを示す。
- (2) $P(k)$ の成立を仮定して $P(k+1)$ の成立を示す。ただし $k \geq k_0$ とする。

の 2 つを示すことで k_0 以上の自然数 n に対し $P(n)$ が成立することを示す方法である。

(B) 次の方法は

(1) $P(1)$ が正しいことを示す。

(2) n より小さい自然数 k に対し $P(k)$ の成立を仮定して $P(n)$ の成立を示す。
ことにより任意の自然数 n に対し $P(n)$ が成立することを示す方法である。

(A) と (B) を組み合わせた方法で次を証明する。

2 以上の任意の自然数は素数の積に分解できる。

勿論この命題は n が素数の場合の 1 個の積、例えば $2 = 2, 3 = 3, \dots$ も含んでいる。

命題 $P(n)$ を「 n は素数の積に分解できる」とする。

(1) 最初に $P(2)$ が正しいことを示す: $2 = 2$ で 2 は素数なので、 2 は素数の積に分解されている。

(2) n より小さい自然数 k に対し $P(k)$ の成立を仮定して $P(n)$ の成立を示す: n を 3 以上の自然数とする。 n より小さい自然数 k に対し $P(k)$ が成立しているとする。 n は素数であるか、素数でないかのいずれかである。 n が素数のときは $n = n$ と素数の積に分解されている。 n が素数ではないとき、定義により $1 < n_1 < n$ となる自然数 n_1 が存在し n は n_1 で割り切れる。よって自然数 n_2 が存在し、 $n = n_1 n_2$ となる。このとき $1 < n_2 < n$ となっている。 $n_1 < n, n_2 < n$ より $P(n_1)$ および $P(n_2)$ が成立している。よって素数 p_1, p_2, \dots, p_s が存在して $n_1 = p_1 p_2 \cdots p_s$ となっている。また素数 q_1, q_2, \dots, q_t が存在して $n_2 = q_1 q_2 \cdots q_t$ となっている。このとき $n = n_1 n_2 = p_1 p_2 \cdots p_s q_1 q_2 \cdots q_t$ となるので n も素数の積に分解できる。よって $P(n)$ が成立する。

数学的帰納法により 2 以上のすべての自然数で $P(n)$ が成立する。

(C) 最初の段階が 2 段階必要な論法が必要なときもある。この論法は

(1) $P(1)$ が正しいことを示す。

(2) $P(2)$ が正しいことを示す。

(3) $P(k)$ および $P(k+1)$ の成立を仮定して $P(k+2)$ の成立を示す。

の 3 つを示すことによりすべての自然数での成立をいう。次の例を考える。

漸化式 $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$, $a_1 = 2, a_2 = 3$ を満たす数列は $a_n = 2^{n-1} + 1$ である。

この命題を数学的帰納法で証明する。 $P(n) : a_n = 2^{n-1} + 1$ とする。

(1) $a_1 = 2 = 2^{1-1} + 1$ なので $P(1)$ は正しい。

(2) $a_2 = 3 = 2^{2-1} + 1$ なので $P(2)$ は正しい。

(3) $P(n)$ と $P(n+1)$ の成立を仮定する。即ち $a_n = 2^{n-1} + 1$, $a_{n+1} = 2^n + 1$ を仮定する。

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 3a_{n+1} - 2a_n = 3(2^n + 1) - 2(2^{n-1} + 1) \\ &= 3 \cdot 2^n - 2^2 + 3 - 2 = (3 - 1)2^n + 1 \\ &= 2^{n+1} + 1 = 2^{(n+2)-1} + 1 \end{aligned}$$

よって $P(n+2)$ が成立する。

数学的帰納法によりすべての自然数 n で $a_n = 2^{n-1} + 1$ が成立することが示された。

演習問題 1.13 次の命題を数学的帰納法により証明せよ。ただし n は自然数とする。

(1) 漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ を満たし、 $a_1 = p$, $a_2 = q$ を満たす数列は

$$a_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}$$

であることを示せ。ただし $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $A = \frac{q-p\beta}{\alpha-\beta}$, $B = \frac{p\alpha-q}{\alpha-\beta}$ とする。

(2) 漸化式 $a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n$ を満たし、 $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_3 = 14$ を満たす数列は

$$a_n = 1 + 2^{n-1} + 3^{n-1}$$

であることを示せ。