

2.4 写像

A, B を集合とする。 A の各要素 a に対し B の要素 b を対応させる規則 f を、集合 A から集合 B への写像 (mapping, map) といい、

$$f: A \longrightarrow B, \quad \text{または} \quad A \xrightarrow{f} B$$

のように表す。

元 $a \in A$ に対応する元 $b \in B$ を写像 f による a の像 (image) といい、 $b = f(a)$ と表す。逆に、 a を f による b の原像 (preimage) という。元 a に対し像は一通りに定まる (このようなとき一意的という) が、元 b に対し原像は一意的とは限らない。

元 x に対し $f(x)$ が対応しているとき $x \mapsto f(x)$ と書くことがある。これをひとまとめにして書くこともある。例えば 2 次関数 $y = f(x) = x^2$ を実数全体の集合 \mathbb{R} から \mathbb{R} への写像と考える。 f は実数 $x \in \mathbb{R}$ に対し x^2 を対応させるので

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

と書くことができる。

定義 2.6

- (1) 写像 $f: A \longrightarrow B$ において、 A を定義域 (domain) といい、 B を終域 (codomain) という。
 $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$
 $= \{b \in B \mid \exists a \in A \ b = f(a)\}$ を値域 (range) あるいは像 (image) という。
- (2) 集合 A から A 自身への写像で、任意の要素 $a \in A$ を a に写す写像を恒等写像 (identity map) といい、 id_A または 1_A という記号で表す (すなわち「 $\forall a \in A \ id_A(a) = a$ 」である)。
- (3) 写像 $f: A \longrightarrow B$ において $f(A) = B$ のとき、 f を A から B への全射 (surjection)、または上への写像 (onto map) という。論理記号を用いて表すと「 $\forall b \in B \ \exists a \in A \ b = f(a)$ 」である。
- (4) 写像 $f: A \longrightarrow B$ において $a_1 \neq a_2$ となる全ての $a_1, a_2 \in A$ に対して、常に $f(a_1) \neq f(a_2)$ となる時、 f を単射 (injection)、または 1 対 1 の写像 (one-to-one map) という。論理記号を用いて表すと「 $\forall a_1, a_2 \in A \ a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)$ 」である⁽¹⁾。
- (5) 写像 $f: A \longrightarrow B$ が全射かつ単射である時、全単射 (bijection) という。
- (6) 2つの写像 $f: A \longrightarrow B, g: B \longrightarrow C$ に対し、 $h(a) = g(f(a))$ で定められる写像 $h: A \longrightarrow C$ を定義できる。これを f と g の合成写像 (composite mapping) といい、 $h = g \circ f$ という記号で表す。
- (7) 2つの写像 $f: A \longrightarrow B$ と $g: C \longrightarrow D$ が次を満たすとき 2つの写像は等しいといい、 $f = g$ と書く； $A = C$ かつ $B = D$ および

$$\forall a \in A \ f(a) = g(a)$$

⁽¹⁾この条件は対偶をとると「 $\forall a_1, a_2 \in A \ f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2$ 」となる。写像が1対1であることを示すときにこの形の方が示しやすい場合もある。

が成立する。即ち、即ち定義域と終域が等しく、元を対応させるルールも等しいときである。

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$ とする。定義域が A , 終域が B である写像をすべて列挙してみよう。1 の行き先、即ち $f(1)$ の可能性は 1, 2 の 2 通りである。2 の行き先、3 の行き先も同様にそれぞれ 2 通りである。 f_1 を $f_1(1) = 1, f_1(2) = 1, f_1(3) = 1$ と定義すると f_1 は A から B への写像である。 f_2 を $f_2(1) = 1, f_2(2) = 1, f_2(3) = 2$ と定義すると f_2 は A から B への写像である。以下列挙していく。

$$\begin{aligned} f_3(1) = 1, f_3(2) = 2, f_3(3) = 1, & \quad f_4(1) = 1, f_4(2) = 2, f_4(3) = 2 \\ f_5(1) = 2, f_5(2) = 1, f_5(3) = 1, & \quad f_6(1) = 2, f_6(2) = 1, f_6(3) = 2 \\ f_7(1) = 2, f_7(2) = 2, f_7(3) = 1, & \quad f_8(1) = 2, f_8(2) = 2, f_8(3) = 2 \end{aligned}$$

以上 f_1 から f_8 までの 8 個で尽くされている。このうち f_1, f_8 は全射ではなく、それ以外は全射である。単射は今の場合存在しない。

次に定義域が B , 終域が A である写像をすべて列挙する。

$$\begin{aligned} g_1(1) = 1, g_1(2) = 1, & \quad g_2(1) = 1, g_2(2) = 2, & \quad g_3(1) = 1, g_3(2) = 3 \\ g_4(1) = 2, g_4(2) = 1, & \quad g_5(1) = 2, g_5(2) = 2, & \quad g_6(1) = 2, g_6(2) = 3 \\ g_7(1) = 3, g_7(2) = 1, & \quad g_8(1) = 3, g_8(2) = 2, & \quad g_9(1) = 3, g_9(2) = 3 \end{aligned}$$

以上 g_1 から g_9 までの 9 個で尽くされている。このうち g_1, g_5, g_9 は単射ではなく、それ以外は単射である。全射は今の場合存在しない。

演習問題 2.8 $A = \{1, 2\}$ とする。定義域および終域がともに A である写像をすべて列挙せよ。その中で単射であるものをすべて挙げよ。また全射であるものをすべて挙げよ。

演習問題 2.9 $A = \{1, 2, 3\}$ とする。定義域および終域がともに A である写像で単射であるものをすべて列挙せよ。また全射であるものをすべて列挙せよ。

演習問題 *2.10 \mathbb{N} から \mathbb{N} への写像で全射であるが、単射でないものをあげよ。また \mathbb{N} から \mathbb{N} への写像で単射であるが、全射でないものをあげよ。

A, B が実数や複素数の部分集合のとき写像 $f: A \rightarrow B$ を関数⁽²⁾(function) と呼ぶことが多い。 $f: X \rightarrow Y$ が関数のとき y が x の式で与えられる場合がよくある。例えば $y = x^2$ の関係があるとき $y = f(x) = x^2$ という関係がある。この $y = f(x) = x^2$ は像であって関数 (写像) ではないが、歴史的用法 (古典的用法) により、関数 $y = f(x) = x^2$ という表現をすることがある。解析学においてはむしろこの表現の方が多いかもかもしれない。

定義域が明示的に述べられていないとき、考えられる最大の集合をとることも多い。例えば定義域の指定なしに関数 $y = \frac{1}{x}$ とした場合、解析学 I, II では通常実数値関数の範囲で考えるので、 $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ と考える。

例 2.7

(1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ と定義する。この場合、定義域は \mathbb{R} であり、終域も \mathbb{R} である。

⁽²⁾元々は関数と書いていたが、当用漢字から「函」の字が外れたために、この漢字を使用するようになった。原義を尊重して関数を用いる人もいる。

$f(1) = f(-1) = 1$ が成立する。すなわち、異なる 2 つの点の行き先で同じになるものがあるので f は単射ではない。

値域 $f(\mathbb{R})$ は 0 以上の実数全体の集合 $f(\mathbb{R}) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\} = [0, \infty)$ である。よって f は全射ではない。

(2) $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ を $f(x) = x^2$ で定義すると、この f は (1) の f と終域を除いて同じ値をとる写像があるが、(1) の f は全射ではないが、(2) の f は全射である。

(3) $f(x) = x^2$ という同じ 2 次関数を考える。しかし今度は、定義域を制限して、 f を $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ という写像と考える。値域 $f([0, \infty))$ はやはり $[0, \infty)$ となる。

この場合、 f は $[0, \infty)$ 上では単調増加であり、 $x_1 \neq x_2$ ならば必ず $f(x_1) = x_1^2 \neq x_2^2 = f(x_2)$ となるので単射である。しかし全射ではないことは明らかである。

(4) しつこく $f(x) = x^2$ という同じ 2 次関数を考える。しかし今度は、定義域と終域を共に制限して、 f を $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ という写像と考える。

(3) で述べた理由から f は単射であり、さらに、値域 $f([0, \infty))$ は $[0, \infty)$ であるので全射となり、全単射となる。

(5) 更にしつこく $f(x) = x^2$ という同じ 2 次関数を考える。今度は、定義域と終域を共に $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0\}$ として、 f を $f: A \rightarrow A$ という写像と考える。このとき f は単射だが、全射ではない (→ 演習問題 2.12)。

演習問題 2.11 以下の (1)~(9) の写像について、

- (a) 単射であるが全射ではない。
- (b) 全射であるが単射ではない。
- (c) 単射でも全射でもない。
- (d) 全単射である。

のどれに相当するのかを判定せよ。

- (1) $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f_1(x) = e^{x^{(3)}}$ と決める。
- (2) $f_2: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を $f_2(x) = e^x$ と決める。
- (3) $f_3: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ を $f_3(x) = e^x$ と決める。
- (4) $f_4: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ を $f_4(x) = e^x$ と決める。
- (5) $f_5: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を $f_5(x) = \log x$ と決める。
- (6) $f_6: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f_6(x) = \cos x$ と決める。
- (7) $f_7: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ を $f_7(x) = \cos x$ と決める。
- (8) $f_8: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ を $f_8(x) = \cos x$ と決める。
- (9) $f_9: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ を $f_9(x) = \cos x$ と決める。

演習問題 2.12 例 2.7 (5) の f が全射でないことを示せ。

命題 2.8 $f: A \rightarrow B$ が全単射であれば、 B の任意の要素 b に対して、 $f(a) = b$ となる A の要素 a がただ一つ存在する。

証明 $f: A \rightarrow B$ は全射なので、 $f(A) = B$ である。従って、 B の任意の要素 b に対して、 $b \in f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$ なので、ある $a \in A$ が存在して、 $b = f(a)$ となっている。

⁽³⁾高校で数学 III を学んでいない学生は初めてかもしれないが、 e は自然対数の底と呼ばれる重要な数である。値は 2.71828... である。これに関しては後で取り扱う。ここでは e は 1 より大きい実数であることを知っていればよい。

f は単射なので、 $f(a_1) = f(a_2) = b$ であるとする $a_1 = a_2$ でなければならない。すなわち、 $f(a) = b$ となるような a はただ一つである。■

$f : A \rightarrow B$ が全単射である時、 $b \in B$ に対して、 $b = f(a)$ を満たす $a \in A$ を対応させる写像が定義できる。これを f の逆写像 (inverse map) といい、 $f^{-1} : B \rightarrow A$ という記号で表す。すなわち、 $f(a) = b$ の時、 $f^{-1}(b) = a$ である。従って特に、

$$f^{-1} \circ f = id_A \quad f \circ f^{-1} = id_B$$

が成り立つ。

例 2.9

- (1) $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ を $f(x) = e^x$ とすると f は全単射である。従って、 f の逆写像 $f^{-1} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する。これが $f^{-1}(x) = \log x$ である。
- (2) $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ を $f(x) = x^2$ とすると全単射となる。従って、この逆写像 $f^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ が存在する。これが $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ である。
- (3) $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ を $f(x) = \sin x$ とすると全単射である。従って、逆写像 $f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ が存在する。この関数を $f^{-1}(x) = \arcsin x$ と書き、アークサイン x と読む。 $\sin^{-1} x$ と書かれることが多いが、間違いやすい記号なので、この講義では採用しない。この関数は後の章で扱うが、重要な関数である。

命題 2.10 $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow A$ であり、 $g \circ f = id_A$ であったとする。

- (1) f は単射である。
- (2) g は全射である。

証明 (1) の証明: $a_1, a_2 \in A$ を $a_1 \neq a_2$ となるものとする。 $g \circ f = id_A$ であるので、

$$g(f(a_1)) = a_1 \neq a_2 = g(f(a_2))$$

である。 $f(a_1) = f(a_2)$ ならば、当然 $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$ とならなければならないが、 $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$ であるので、 $f(a_1) \neq f(a_2)$ であり、従って f は単射である。

(2) の証明: $g \circ f = id_A$ であるので、 $g(f(A)) = A$ である。 $f(A) \subseteq B$ であるから、 $A = g(f(A)) \subseteq g(B)$ である。しかし、 $g(B) \subseteq A$ であるから、 $g(B) = A$ が成り立つ。■

演習問題 2.13 $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ とする。

- (1) f と g が単射ならば、 $g \circ f : A \rightarrow C$ も単射であることを証明せよ。
- (2) f と g が全射ならば、 $g \circ f : A \rightarrow C$ も全射であることを証明せよ。

ヒント: 単射と全射の定義が満たされることを示せば良い。

演習問題 2.14 X, Y を集合とし、 $f : X \rightarrow Y$ とする。 A, B を X の部分集合とする。

- (1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ を証明せよ。
- (2) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ を証明せよ。
- (3) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ とはならない例を挙げよ。

ヒント: (1), (2) については、問題 2.5 のヒントを参照。(3) については、そういう例を作れば良い。