数学序論要綱 #7　　　　2009–6–8　　河野

3　複素平面とオイラーの公式

3.1　複素数の四則

2 次方程式

$$x^2 = -1 \tag{1}$$

は、実数解を持たない。2 乗して負になる数は、実数には存在しないからである。2 次方程式 (1) が解を持つようにするためには、2 乗して -1 となる数の導入が必要である[(1)]。$i^2 = -1$ となる数を i で表し，**虚数単位**と呼ぶ。この i を用いれば，2 乗して -1，-2，-3，$\cdots$ となる数は，$\pm i, \pm\sqrt{2}i, \pm\sqrt{3}i, \cdots$ と表すことができる。このように，2 乗して負となる数を**純虚数**と呼ぶ。さらに，実数と純虚数の和

$$\alpha = a + bi \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

を**複素数**と呼ぶ。a, b をそれぞれ，複素数 α の**実部**，**虚部**と呼び，

$$a = \mathrm{Re}(\alpha), \qquad b = \mathrm{Im}(\alpha)$$

で表す。また，複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ で表す。すなわち，

$$\mathbb{C} = \{\, a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \,\}$$

となる。さて，虚部が 0 の複素数 $(b = 0)$ は， 実数であるから，実数全体の集合$\mathbb{R}$は，複素数全体の集合$\mathbb{C}$の部分集合となっている。

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

実数 $a, b, c \in \mathbb{R}$ を係数に持つ 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

の解は，

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

となり，必ず複素数の範囲に解を持つ。

では，複素数 $a_n, \cdots a_0$ に対し代数方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (a_n \neq 0) \tag{2}$$

の解を考えるとき，さらなる数の拡張が必要となるのであろうか？この問いに対して，次の定理が成り立つ：

[(1)] 実際の複素数は 2 次方程式の解からではなく，3 次方程式の解の公式から考えられるに到った。最終的に実数解が得られる場合でも計算途中で 2 乗して負になる数が出てくる場合があった。最初は計算の途中ででてくる想像上の数と思われており，**虚数** (*imaginary number*) という言葉にその名残がある。

定理 3.1 [代数学の基本定理] n 次代数方程式 (2) は，いつでも n 個 (k 重解は k 個と数える) の解を複素数の範囲に持つ。

この定理により，高次の代数方程式を考えても，数の範囲を拡張する必要はないのである。すなわち，代数方程式を考える限り，複素数で十分であることが解る。

まず，2 つの複素数 $\alpha = a + bi, \beta = c + di \in \mathbb{C}$ が等しいとは，次が成り立つことである：

$$\alpha = \beta \quad \Longleftrightarrow \quad a = c, \quad b = d$$

特に，

$$\alpha = 0 \qquad \Longleftrightarrow \quad a = 0, \quad b = 0$$

である。

複素数の四則演算は，$i^2 = -1$ に注意すれば，実数の場合と変わらない。加法，減法，乗法，除法は i を単なる文字だと考え，i^2 が出てきたら -1 に変えればよい。即ち

$$\begin{aligned}
(a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(b+d)i \\
(a+bi)-(c+di) &= (a-c)+(b-d)i \\
(a+bi)\cdot(c+di) &= ac+adi+bci+bdi^2 \\
&= (ac-bd)+(ad+bc)i \\
\frac{a+bi}{c+di} &= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} \\
&= \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} \\
&= \frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i
\end{aligned}$$

特に，$c + di$ の逆数は，

$$\frac{1}{c+di} = \frac{c}{c^2+d^2} - \frac{d}{c^2+d^2}i$$

である。

演習問題 3.1 次の計算をせよ。

(1) $(3+5i)+(4-7i)$

(2) $(2+3i)(3-4i)$

(3) $\dfrac{5+3i}{1+2i}$

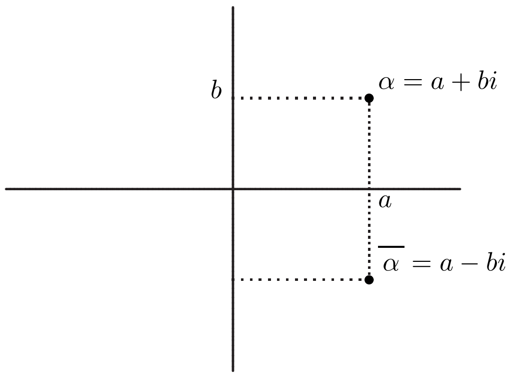
(4) $\dfrac{1}{5-2i}$

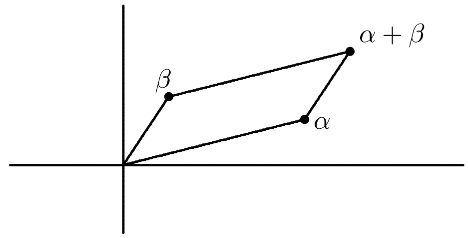
3.2 複素平面

実数の集合は，数直線で幾何学的に表せる。同様に，複素数は 2 つの実数の組で決まるから，平面上の点で表すことが出来る。すなわち，$\alpha = a + bi$ とすると

$$\begin{aligned}
\mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
\alpha &\longmapsto (a,b).
\end{aligned}$$

なる写像は全単射であり，複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ と平面 $\mathbb{R}^2$ が同一視出来る。





この平面を**複素平面**または**ガウス平面**と呼び，x 軸，y 軸 をそれぞれ**実軸**，**虚軸**と呼ぶ。複素数の演算において複素数 $\alpha = a + bi$，$\beta = c + di$ の和を定めたが，$\mathbb{C}$ と $\mathbb{R}^2$ の同一視を通して α, β を平面のベクトル $(a, b), (c, d)$ と思う事により，複素数の和 $\alpha + \beta$ は，ベクトルとしての和 $\alpha + \beta = (a + c, b + d)$ と幾何学的に解釈できる。

複素共役　複素数 $\alpha = a + bi$ に対して，

$$\overline{\alpha} = a - bi$$

を α の**複素共役**と呼ぶ。$\alpha, \overline{\alpha}$ を用いれば，複素数 α の実部，虚部は次のように表せる：

$$\mathrm{Re}(\alpha) = \frac{\alpha + \overline{\alpha}}{2}, \qquad \mathrm{Im}(\alpha) = \frac{\alpha - \overline{\alpha}}{2i}$$

複素平面で考えると，実軸 (x 軸) に関して対称移動した点に対応するのが共役複素数である。複素数の共役に対して，次が成り立つ：

命題 3.2 複素数 α，α_1，α_2 に対して，

$$(1)\ \overline{\overline{\alpha}} = \alpha \qquad (2)\ \overline{(\alpha_1 + \alpha_2)} = \overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_2} \qquad (3)\ \overline{\alpha_1 \cdot \alpha_2} = \overline{\alpha_1} \cdot \overline{\alpha_2} \qquad (4)\ \overline{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)} = \frac{\overline{\alpha_1}}{\overline{\alpha_2}}$$

が成り立つ。

ここでは (2) のみ証明し後は演習問題とする。$\alpha_1 = a+bi.\alpha_2 = c+di$ とおくと $\overline{\alpha_1} = a-bi, \overline{\alpha_2} = c - di$ である。$\alpha_1 + \alpha_2 = (a + c) + (b + d)i$ なので $\overline{\alpha_1 + \alpha_2} = (a + c) - (b + d)i$ となる。よって

$$\begin{aligned}\overline{\alpha_1 + \alpha_2} &= (a + c) - (b + d)i \\ &= (a - bi) + (c - di) \\ &= \overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_2}\end{aligned}$$

が成立する。

演習問題 3.2　命題 3.2 を証明せよ。

絶対値　複素数 $\alpha = a + bi$ に対して，

$$\alpha \cdot \overline{\alpha} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 \geqq 0$$

であるから，平方根がとれ，それを α の**絶対値**と呼ぶ：

$$|\alpha| = \sqrt{a^2+b^2}, \qquad |\alpha|^2 = \alpha\overline{\alpha}$$

複素平面において，原点 O から $\alpha = a + bi$ までの距離を r とおくと，ピタゴラスの定理より

$$r = \sqrt{a^2+b^2} = |\alpha|$$

が成り立つ。すなわち，複素数 α の絶対値は，幾何学的にはベクトル α の**長さ**を表している。また，2 点 $\alpha = a + bi$，$\beta = c + di$ の距離は，$\alpha - \beta$ の絶対値で与えられる。すなわち

$$|\alpha - \beta| = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$

が成立する (図 3.1 参照)。

演習問題 3.3　次の問いに答えよ。
(1) $\alpha = 0 \iff |\alpha| = 0$ を証明せよ。
(2) $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha||\beta|$ を示せ。

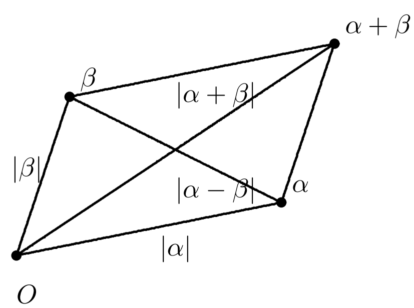


図 3.1

さて，2 点間の距離に関して次の定理が成り立つ：

定理 3.3 [三角不等式] 複素数 α, β に対して，次の不等式が成り立つ：

(1) $|\alpha + \beta| \leqq |\alpha| + |\beta|$

(2) $|\alpha| - |\beta| \leqq |\alpha - \beta|$

演習問題 3.4　図 3.1 を参考にして定理 3.3 を証明せよ。