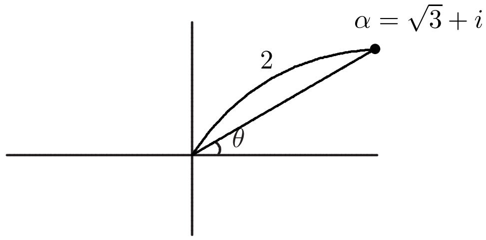
数学序論要綱 #8　　2009–6–15　　河野

3.3　複素数の極形式とオイラーの公式

ここでは，複素数に対する極形式，オイラーの公式を与え，複素数の積の幾何学的意味を考える。

まず例から始めよう。 $\mathbb{C}$ と複素平面の同一視の下で，複素数 $\alpha = \sqrt{3} + i$ の表す平面内の点 α を考える。α と実軸の正の向きとがなす角を θ とし (今の場合 $\theta = \dfrac{\pi}{6}$)，$\sqrt{3} + i$ を α の絶対値と θ で表してみると次の図の様になる：



$$|\alpha| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2, \quad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

であるから，

$$\sqrt{3}+i = 2\cos\frac{\pi}{6} + 2i\sin\frac{\pi}{6} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

となる。

次に，一般の場合を考えよう。複素数 $\alpha = a + bi$ に対して，ベクトル α と実軸の正の向きとが作る角を θ とおく。このとき，θ の範囲は，

$$0 \leqq \theta < 2\pi$$

の範囲で唯 1 つ定まる ($0 \leqq \theta < 2\pi$ という制限をつけなければ θ の選び方には $2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ だけの不定性があることに注意する)。ベクトル α の長さを r とすると

$$\cos\theta = \frac{a}{r}, \quad \sin\theta = \frac{b}{r} \iff a = r\cos\theta, \quad b = r\sin\theta$$

が成り立っている。 従って，

$$\alpha = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

を得る。この複素数の長さ及び角度 θ を用いた表示を $\alpha = a + bi$ の**極形式**と呼び，θ を $\alpha = a + bi$ の**偏角**と呼ぶ。

演習問題 3.5　次の複素数の極形式を求めよ。

(1) $1 + i\sqrt{3}$　　(2) -2　　(3) i　　(4) $2\sqrt{3} - 2i$　　(5) $1 - \sqrt{3}i$

虚数 $i\theta$ を変数とする指数関数 $e^{i\theta}$ を，天下り的に次の式で定める：

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

これを**オイラーの公式**(1)と呼ぶ。この公式が何故成立するかに関しては解析学 I で学ぶが，ここでは天下りに成立するものとして議論を進める。

(1)オイラーの公式と呼ばれるものは沢山あって，一般の場合「オイラーの公式」といってもどれを指すか不明確だが，数学序論および解析学 I,II ではこの公式を指すものと約束する。

以下，少しだけ指数関数 $e^{i\theta}$ の性質を解説する。オイラーの公式において，θ を $-\theta$ に置き換え，$\cos(-\theta) = \cos\theta$，$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ を用いると

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

が得られることに注意する。

演習問題 3.6　次の問いに答えよ。
(1) $e^{i\theta}$ は，原点を中心とする半径 1 の円上の点であることを示せ。
(2) オイラーの公式を用いて次の等式を導け。

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

指数関数 $e^{i\theta}$ に対しても実数の指数関数 e^x と同様に指数法則が成り立つのか気になるが，次の定理が成り立つ：

定理 3.4 虚数 $i\theta$ を変数とする指数関数 $e^{i\theta}$ に対して指数法則が成り立つ：

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

証明　オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と三角関数の加法定理より，

$$\begin{aligned}
e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= (\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2 - \sin\theta_1\cdot\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cdot\cos\theta_2 + \cos\theta_1\cdot\sin\theta_2) \\
&= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) \\
&= e^{i(\theta_1+\theta_2)}
\end{aligned}$$

となり指数法則が成立している。 ∎

注意 3.5 [指数法則＝加法定理] この定理の逆，すなわち，指数関数 $e^{i\theta}$ の指数法則を仮定することにより，三角関数の加法定理が証明できる。 実際，オイラーの公式より

$$\begin{aligned}
e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= (\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2 - \sin\theta_1\cdot\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cdot\cos\theta_2 + \cos\theta_1\cdot\sin\theta_2)
\end{aligned}$$

であり一方，

$$e^{i(\theta_1+\theta_2)} = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)$$

なので，指数関数 $e^{i\theta}$ の指数法則 ($e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$) より三角関数の加法定理を得る。

さらに，定理 3.4 から次の系を得る：

系 3.6 [ド・ モアブルの公式] 自然数 n に対して，

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, \qquad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

が成り立つ。

証明　定理 3.4 において，$\theta_1 = \theta_2 = \theta$ とおけば，$(e^{i\theta})^2 = e^{i(\theta+\theta)} = e^{i2\theta}$ が成り立つ。さらに定理 3.4 を適用すれば，

$$(e^{i\theta})^3 = (e^{i\theta})^2 \cdot e^{i\theta} = e^{i2\theta}e^{i\theta} = e^{i3\theta}$$

を得る。以下，同様にして任意の自然数 n に対して，$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ が成り立つことが分かる (きちんと示すには数学的帰納法を用いる。演習問題 3.7 参照)。 ▮

演習問題 3.7　次の問いに答えよ。
(1) $(e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}$ を示せ。
(2) 系 3.6 を証明せよ。

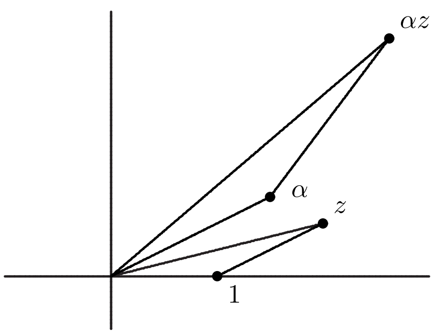


図 3.2

複素数の極形式の話に戻ろう。複素数 $\alpha = a+ib$ の絶対値を r，偏角を θ とする。オイラーの公式を用いると極形式は，次の様に書き直せる：

$$\alpha = a + ib = re^{i\theta}$$

これもまた複素数 α の**極形式**と呼ぶことにする。ここで，

$$r = \sqrt{a^2+b^2} = |\alpha| \qquad \cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \sin\theta = \frac{b}{r}$$

であった。この極形式を用いて，複素数の積の幾何学的意味を理解しよう。

$$\alpha = r_0 e^{i\lambda}, \qquad z = re^{i\theta}$$

とおく。

複素数をベクトルと見なすと，ベクトル α は長さが r_0 で実軸の正の向きとの成す角が λ のベクトル，z は長さが r で実軸の正の向きとの成す角が θ であるベクトルである。このとき，複素数としての積は，

$$\alpha z = r_0 e^{i\lambda} re^{i\theta} = r_0 r e^{i(\lambda+\theta)}$$

であるから，ベクトル z は，複素数 α を掛けることにより，長さが r_0 倍，実軸の正の向きから λ だけ回転されたベクトル αz に変換された。これが複素数の積の幾何学的意味である。とくに，$r_0 = 1$ のとき，αz は z を λ だけ反時計回りに回転させたベクトルである。

特に $|\alpha| = r_0 = 1$ のとき αz は z を原点の回りに λ だけ回転させたベクトルになっている。$i = e^{i\pi/2}$ なので i をかけることは原点の回りに $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転させることになる。

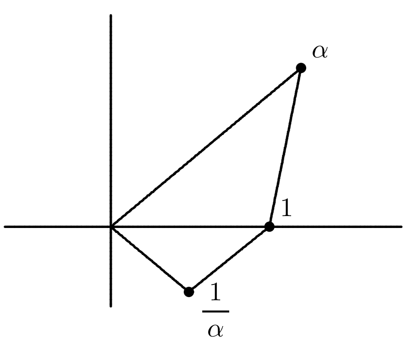


図 3.3

図 3.2 において $z = \dfrac{1}{\alpha}$ とおくと，$\alpha z = 1$ なので図 3.3 のようになる。即ち $\dfrac{1}{\alpha}$ の偏角は α の偏角の符号入れ替えたものであり，絶対値は逆数になっている。即ち

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{r_0}e^{-i\lambda}$$

となっている。α で割ることは $\dfrac{1}{\alpha}$ をかけることなので，z を α の偏角だけ時計回りに回転させ，α の絶対値で割ったものが商になる。

代数的には，

$$\frac{z}{\alpha} = \frac{re^{i\theta}}{r_0 e^{i\lambda}} = \frac{r}{r_0} e^{i(\theta-\lambda)}$$

となっている。

注意 3.7 z や α の偏角が 0 から 2π の範囲に入っていても，αz や $\dfrac{z}{\alpha}$ の偏角が 0 から 2π の範囲に入っているとは限らない。

演習問題 3.8　次の点を極形式で表し図示せよ。

(1) $\alpha = 2 + 2i$　　(2) $\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$　　(3) $\alpha\beta$　　(4) $\dfrac{\beta}{\alpha}$

1 の n 乗根　任意の正の整数 n に対して，

$$z^n = 1$$

が成り立つとき，z を 1 の n **乗根**と呼ぶ。$|z|^n = 1$ 且つ $|z| > 0$ より，$|z| = 1$。すなわち，複素数 z は原点を中心とした半径 1 の円上の点である。そこで，$z = e^{i\theta}$ とおけば，ド・モアブルの公式より，

$$e^{in\theta} = 1.$$

従って，

$$n\theta = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

を得る。これより，方程式 $z^n = 1$ の解は，

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)^{(2)} &= \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} \\
\exp\left(\frac{4\pi i}{n}\right) &= \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n} \\
&\cdots \\
\exp\left(\frac{2(n-1)\pi i}{n}\right) &= \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n} \\
\exp\left(\frac{2\pi n i}{\pi}\right) &= 1
\end{aligned}$$

の n 個である。

演習問題 3.9

(1)　1 の 4 乗根を具体的に求め，複素平面に図示せよ。

(2)　1 の 3 乗根を具体的に求め，複素平面に図示せよ。

(3)　1 の 6 乗根を具体的に求め，複素平面に図示せよ。

(4)　1 の 5 乗根を求め，複素平面に図示せよ。

---

(2) 指数関数の冪の部分が複雑な場合このような記号を用いることがある。$\exp(X) = e^X$ を意味する。