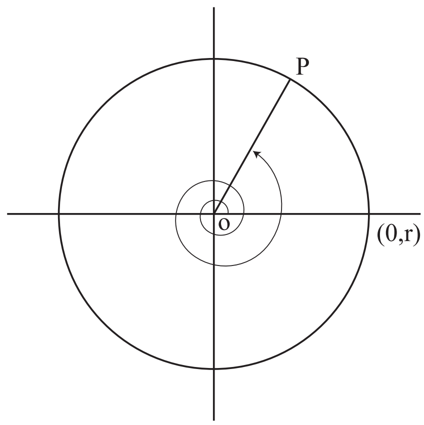
# 4 いろいろな関数

## 4.1 三角関数

### 一般角




原点を中心とする半径 $r$ の円周上に，点 $P$ をとり，線分 $OP$ を考える。点 $P$ がこの円周上を動く時，この線分が原点を中心として回転することになる。この時，この線分 $OP$ を **動径** という。$P=(0,r)$ すなわち，動径が右側で水平な状態から回転して行く時，その動いた角度を $OP$ の **一般角** という。反時計回りを **正の向き** と決める。時計回りに動く時は，角度は負であるとする。

2 つの線分が作る角度は 0 から $2\pi$ までの値しかとらないが，一般角は全ての実数値をとる。

**三角関数**　半径 1 の円周上において $OP$ を動径とし，それが定める一般角を $\theta$ とする。$P$ の座標が $(x,y)$ である時，

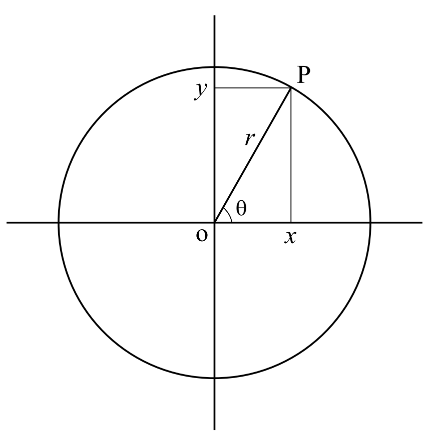
$$\cos\theta = x, \qquad \sin\theta = y$$

と決める。また，$x \neq 0$ の時，

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

と決める。従って $\tan\theta$ は，円周上において $x=0$ となる角度，すなわち，任意の整数 $n$ に対して

$$\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$$




では定義されない。

$\theta \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ ならば，すなわち $\cos\theta \neq 0$ ならば，

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

である。

ピタゴラスの定理より，任意の $\theta$ に対して，

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

が成り立つ。

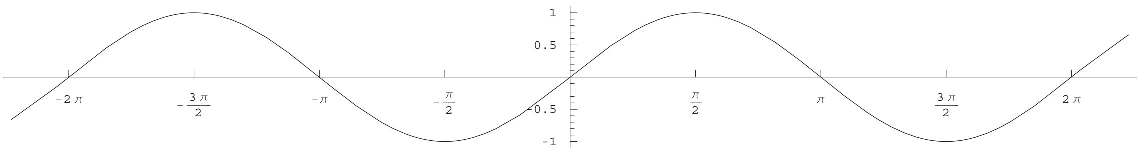



図 4.1: $y = \sin x$ のグラフ

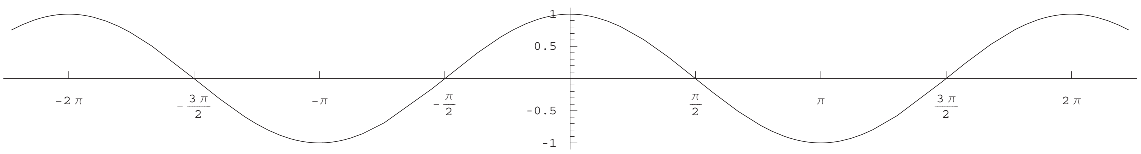



図 4.2: $y = \cos x$ のグラフ

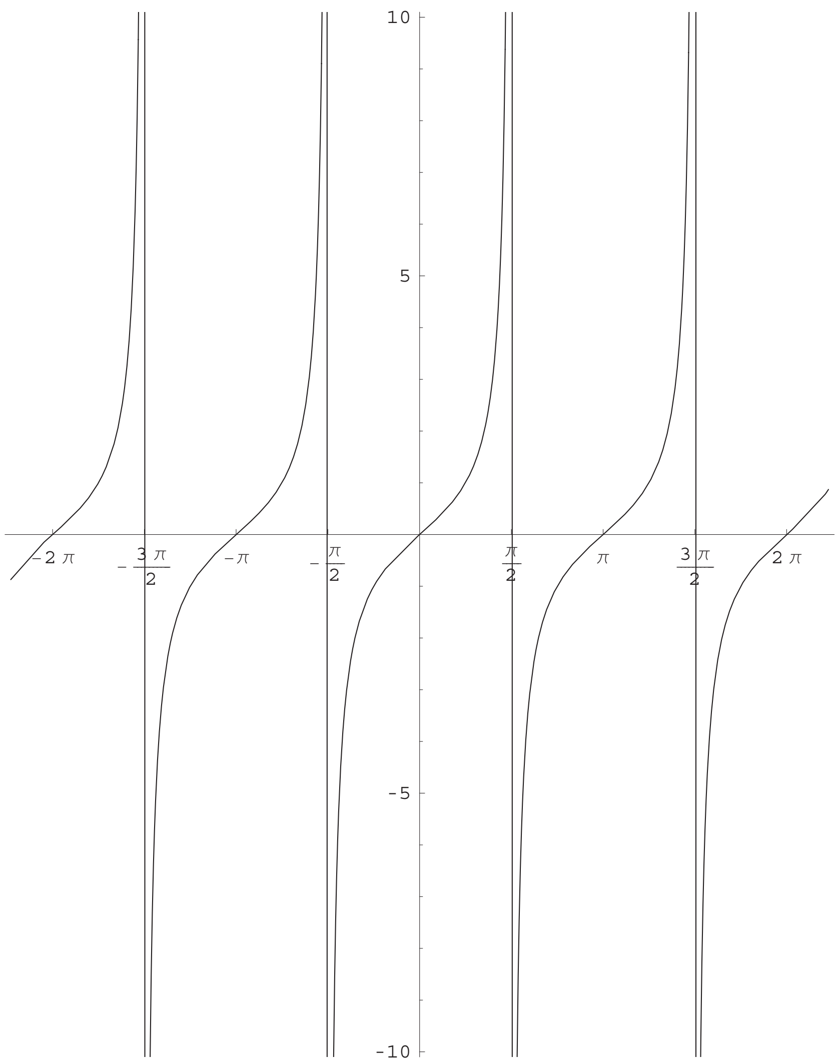



図 4.3: $y = \tan x$ のグラフ

- $\theta$ を改めて $x$ と書くと，$\sin x, \cos x$ は，全ての実数 $x$ に対して定義された関数である。また $\tan x$ は，
$$\mathbb{R} - \left\{ x \,\middle|\, x = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \right\}$$
という集合上で定義された関数である。

- $\sin x$ を **正弦関数**，$\cos x$ を **余弦関数**，$\tan x$ を **正接関数** という。これらを **三角関数** という。

- また，これらの逆数を与える関数を
$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$
と書き，それぞれ **コセカント** , **セカント** , **コタンジェント** と読む[1]。$\operatorname{cosec} x$ は $\csc x$ と書くこともある。

- 定義から，任意の整数 $n$ に対して，
$$\sin x = \sin(x + 2n\pi), \quad \cos x = \cos(x + 2n\pi), \quad \tan x = \tan(x + n\pi)$$
が成り立つ。

- 一般に，関数 $f(x)$ に対して，ある実数 $p$ が存在して，$f$ の定義域上の任意の $x$ に対して $f(x) = f(x+p)$ が成り立つ時，$f$ は **周期** $p$ の **周期関数** であるという。この用語を用いると，$\sin x, \cos x$ は，周期 $2\pi$ の周期関数であり，$\tan x$ は周期 $\pi$ の周期関数である。

- 定義から，任意の実数 $x$ に対して
$$\sin(-x) = -\sin x, \qquad \cos(-x) = \cos x$$
が成り立つ。 従って $\tan(-x) = -\tan x$ である。

- 一般に，任意の実数 $x$ に対して $f(-x) = -f(x)$ となる関数を**奇関数**，$f(-x) = f(x)$ となる関数を**偶関数** という。$\cos x$ は偶関数であり，$\sin x, \tan x$ は奇関数である。

  $f(x)$ が偶関数ならば，$(x, f(x))$ がそのグラフ上の点であるとき，$(-x, f(-x)) = (-x, f(x))$ もグラフ上の点となる。すなわち，$f(x)$ のグラフは $y$-軸に関して対称である。

  $f(x)$ が奇関数ならば，$(x, f(x))$ がそのグラフ上の点であるとき，$(-x, f(-x)) = (-x, -f(x))$ もグラフ上の点となる。すなわち，$f(x)$ のグラフは原点に関して点対称である。

**余弦定理，正弦定理**

**定理 4.1** [余弦定理] 三角形 $OAB$ において，$\theta = \angle AOB$ とすると，
$$OA^2 + OB^2 - AB^2 = 2\, OA \cdot OB\, \cos\theta$$
が成り立つ。

**演習問題 4.1**　定理 4.1 を証明せよ。

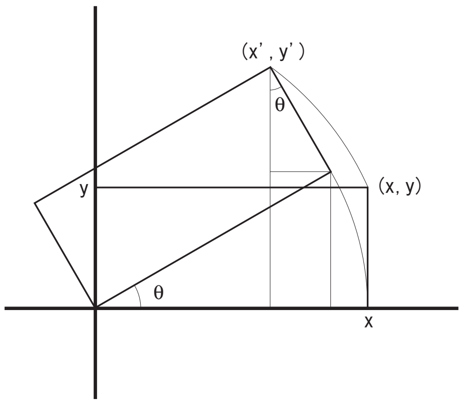
---
[1] 昔はサインやコサイン等と同等に用いられていたが，最近はあまり用いられない。高校の教科書からも消えてしまった。

**定理 4.2** [正弦定理] 三角形 $ABC$ において，各頂点 $A, B, C$ の角度を同じ $A, B, C$ で表し，それらの向かい側の辺の長さをそれぞれ $a, b, c$ で表す。また，この三角形の外接円の半径を $r$ とする。このとき次が成り立つ。

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$$

**演習問題 4.2**　定理 4.2 を証明せよ。

加法定理




sin, cos の加法定理とは，次のような公式である。

$$\begin{aligned}\sin(\theta_1+\theta_2) &= \sin\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_2\cos\theta_1\\ \cos(\theta_1+\theta_2) &= \cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2\end{aligned}$$

なぜこれが成り立つのかは，左のような図を書いてみるとわかる。

$(x, y)$ という点を原点を中心として角度 $\theta$ だけ回転させることにより，$(x', y')$ という点になったとする。

この図から，

$$\begin{aligned}x' &= x\cos\theta - y\sin\theta\\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta\end{aligned}$$

となることがわかる。(しかし，$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ となるどんな $\theta$ に対してもこうなる，ということは，注意深く確認しなければならない。)

特に，$(x, y)$ が単位円上にあり，$x = \cos\theta_1$, $y = \sin\theta_1$ であって，回転の角度が $\theta = \theta_2$ の時，

$$x' = \cos(\theta_1+\theta_2), \qquad y' = \sin(\theta_1+\theta_2)$$

であるから，上の加法定理が得られる。

**演習問題 4.3**　加法定理を用いて以下の公式を示せ[(2)]。

**(1)**

$$\begin{aligned}&\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x, &&\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x\\ &\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x, &&\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x\end{aligned}$$

**(2)**

$$\sin(x\pm\pi) = -\sin x, \qquad \cos(x\pm\pi) = -\cos x$$

**(3)**　$\tan x$ **の加法定理：**

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}, \qquad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

[(2)] この問題にある公式を丸暗記している人がいるが，正確に丸暗記しているならまだしも，不正確に暗記して必要なときに間違うということが多々ある。これらの式を自分で導くことにより，三角関数の諸性質に精通した方が丸暗記よりも有効であると思われる。

**(4)** 倍角の公式：

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta, \quad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

**(5)** **3** 倍角の公式：

$$\sin 3\theta = -4\sin^3\theta + 3\sin\theta, \qquad \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

**(6)** 半角の公式：

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}, \qquad \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

**(7)** 和積公式：

$$\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\,\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\,\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\,\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\,\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)
\end{aligned}$$

**(8)** 積和公式：

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\sin\beta &= -\frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right\} \\
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right\} \\
\cos\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right\} \\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right\}
\end{aligned}$$