数学序論要綱 #11　　2009–7–2　　河野

4.4 対数関数

$a \neq 1$ を正の実数として $f(x) = a^x$ を指数関数とする。指数関数の性質のところで述べたように，$f : \mathbb{R} \longrightarrow (\,0, \infty\,)$ は単調増加か単調減少であるので単射である。また，$a > 1$ のときは $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ であり，$0 < a < 1$ のときは $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$ となり，$(\,0, \infty\,)$ の全ての値をとるので全射である。よって，全単射である。

従って，逆関数 $f^{-1} : (\,0, \infty\,) \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在する。この関数を $\log_a x$ と書き，a を**底** とする**対数関数** という。

$$\boxed{y = a^x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \log_a y}$$

指数法則より，次が成り立つ。

命題 4.14 (1) $\log_a 1 = 0$，$\log_a a = 1$ が成り立つ。

(2) 任意の正の実数 p, q に対して次が成り立つ。

$$\log_a pq = \log_a p + \log_a q$$

(3) 任意の正の実数 p と任意の実数 c に対して次が成り立つ。

$$\log_a p^c = c \log_a p$$

(4) (底の変換) 1 ではない任意の正の実数 a, b と任意の正の実数 p に対して次が成り立つ。

$$\log_a p = \frac{\log_b p}{\log_b a}$$

証明 **(1)** $a^0 = 1$ より，対数の定義を用いると $0 = \log_a 1$ となる。$a^1 = a$ より $1 = \log_a a$ となる。

(2) a^x という関数は任意の正の実数をその値として持つから，任意の正の実数 p, q に対してある実数 s, t があって $p = a^s, q = a^t$ となる。指数法則から，$r = a^{s+t}$ とおくと，$r = a^{s+t} = a^s a^t = pq$ である。また，対数関数の定義から，$s = \log_a p$, $t = \log_a q$, $s + t = \log_a r = \log_a pq$ であるから，$\log_a r = \log_a pq = \log_a p + \log_a q$ となる。

(3) $p = a^s$ とする。指数法則から $p^c = (a^s)^c = a^{cs}$ であるから，$\log_a p^c = cs = c \log_a p$ が成り立つ。

(4) $b^u = p, b^v = a$ とすると $\log_b p = u, \log_b a = v$ である。

$$p = b^u = b^{\frac{u}{v}\cdot v} = (b^v)^{\frac{u}{v}} = a^{\frac{u}{v}}$$

であるから，

$$\log_a p = \frac{u}{v} = \frac{\log_b p}{\log_b a}$$

となる。∎

この命題から次がわかる。

系 **4.15** **(1)** $\log_a \dfrac{1}{p} = -\log_a p$.

(2) $\log_a \dfrac{p}{q} = \log_a p - \log_a q$

このように対数は，積の計算が和の計算に置き換わる，という画期的な性質を持っている。計算機などはなく，全てを手計算で行っていた時代では，これによる恩恵は，計り知れないものがある。対数は，スコットランドのジョン・ネイピア (1550–1617) とスイスのヨブスト・ビュルギ (1552–1652) によって同じ頃に発見されたと言われているが，世に知られて，広く使われるようになったのは，ネイピアによる著作「対数の驚くべき規則の叙述」(1614 年) と「対数の驚くべき規則の構成」(1619) による。これらの本の中には，ネイピアが 20 年かけて計算した詳細な対数表が含まれており (もちろん全て手計算であるにもかかわらず，ほとんど誤りがなかった)，その後のあらゆる分野における数値計算の労力を劇的に軽減した。その意味でネイピアは，その後の科学技術の発展に多大な貢献をなしたと言える。(実際にはその後，ヘンリー・ブリッグズ，アドリアン・ヴラックらがネイピアとの議論に基づいて対数表を改良し，より詳細な表を作って 1628 年に発表した。その対数表は 20 世紀に至るまで，ほとんど全ての対数表の基礎となった。)

また，数を小数を用いて表すという，現在普通につかわれている表記方法は，ネイピアによって考え出され，上記の本で初めて現れた (小数の基本的な考え方やある種の表記方法は以前からあったが，普及していなかった)。当時も精密な計算は 7 〜 8 桁の精度で行われていたが，例えば 12.345678 は $12\,\dfrac{345678}{1000000}$ などと書かれていた。

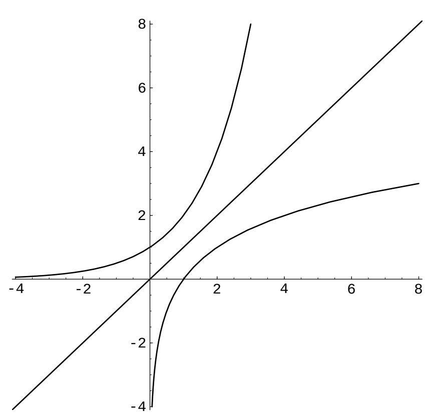
ちなみに，自然対数の底 e を **ネイピアの定数** というが，実際，彼が最初に考えた対数は，e という数を意識はしていなかったが，基本的には自然対数であった。その後，より計算に便利な，10 を底とする常用対数を提案するようになる。

演習問題 4.7

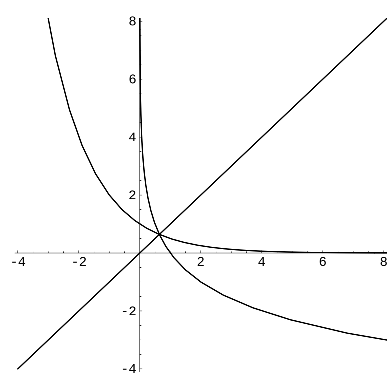
(1) a, b, c を正の実数とする。$a^b = c^{b \log_c a}$ を示せ。

(2) a, b, c を正の実数とする。$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ を示せ。

対数関数のグラフ　対数関数は指数関数の逆関数なので，そのグラフは，対応する指数関数のグラフを $y = x$ に関して対称に写せばよい。



$y = 2^x$ と $y = \log_2 x$ のグラフ



$y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ と $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフ

4.5　逆三角関数

三角関数 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数を考えてみよう。逆関数は，全単射になっていなければ定義できないが，$\sin x$, $\cos x$ は実数全体で定義された関数と見なすと単射ではない。そこで，逆関数を考えるためには，定義域を限定して，全単射になるような部分だけを取り出す必要がある。

$\sin x$ や $\cos x$ がその上で全単射になるような区間は無数にあり，そのうちのどれを採用したとしても，そこに限定した $\sin x$ や $\cos x$ は，当然，逆関数を持つ。そのような区間として，最も「標準的な」ものとしては，次のようなものが考えられる。

$f(x) = \sin x$ とする。この関数の定義域を $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ に制限した関数 f (名前を変更する必要があるかもしれないが，ここでは混同して用いる) を

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \longrightarrow [-1, 1]$$

とすると，f は全単射になる。従って，逆関数

$$f^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

が存在する。これを $\arcsin x$ と書く (**アークサイン** と読む)。$\sin^{-1} x$ という記法も用いられるが，誤解を生みやすい記号なのでこの講義では採用しないことにする。

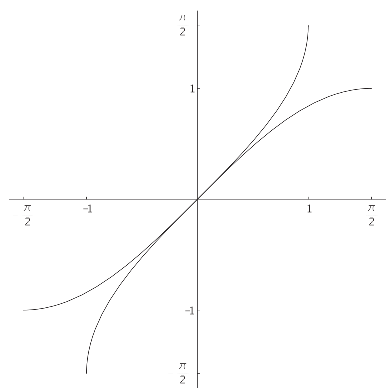


図 4.5: $\sin x$ と $\arcsin x$

$g(x) = \cos x$ とする。この関数の定義域を $[0, \pi]$ に制限した関数 g (名前を変更する必要があるかもしれないが，ここでは混同して用いる) を

$$g : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$

とすると，g は全単射になる。従って，逆関数

$$g^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

が存在する。これを $\arccos x$ と書く (**アークコサイン**と読む)。$\cos^{-1} x$ という記法も用いられるが，誤解を生みやすい記号なのでこの講義では採用しないことにする。

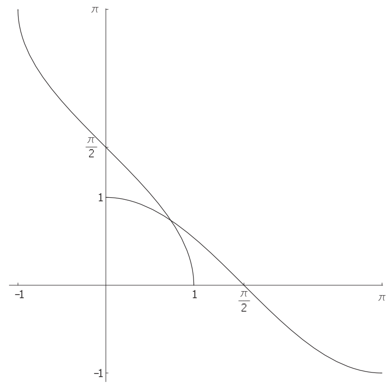


図 4.6: $\cos x$ と $\arccos x$

$\tan x$ は $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ から $\mathbb{R}$ への全単射であるから，$\mathbb{R}$ から $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ への逆関数が存在する。これを $\arctan x$ などと書き，**アークタンジェント** x と読む。$\tan^{-1} x$ という記法も用いられるが，誤解を生みやすい記号なのでこの講義では採用しないことにする。

$\arctan x$ は実数全体で定義された関数なので，$\dfrac{\pi}{2} + n\pi$ という点で値が定義されない $\tan x$ と比べると，どうちらかと言うと，より「まともな」関数である，という見方もできる。

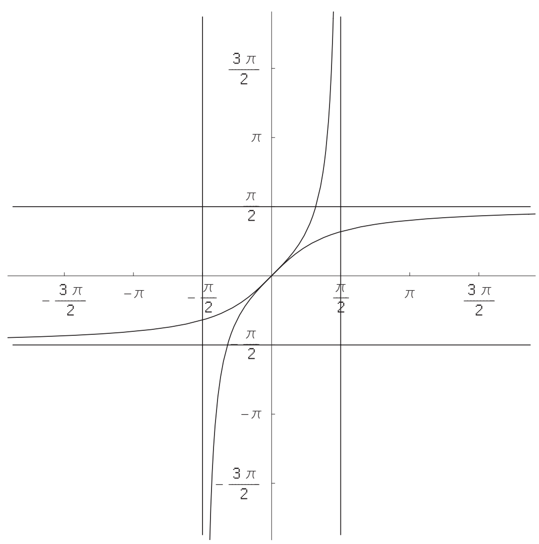


図 4.7: $\tan x$ と $\arctan x$ のグラフ

演習問題 4.8

(1) 次の値を求めよ。

$$\arcsin\frac{1}{2},\quad \arccos\frac{1}{2},\quad \arctan 1,\quad \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \arctan\sqrt{3},\quad \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(2) $-1 \leqq x \leqq 1$ の時，$\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(3) $x > 0$ の時，$\arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(4) $\arctan x = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ を示せ。

4.6 双曲線関数

双曲線のパラメータ表示には次に紹介する双曲線関数が用いられる。積分でも使用する場合があるので関数を紹介しておく。パラメータ表示について一言だけふれておくと，$x = \cos t$，$y = \sin t$ は楕円の標準形ともいえる「円」

$$x^2 + y^2 = 1$$

のパラメータ表示を与えるのに対し，ここで定義する項曲線関数は双曲線の標準形ともいえる「直角双曲線」

$$x^2 - y^2 = 1$$

のパラメータ表示を与える。

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

を双曲線関数という。 cosh は**ハイパボリック・コサイン** などと読む[(1)]。

演習問題 4.9 次を示せ。

(1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(2) $\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$

(3) $\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b$

明らかに $\cosh x$ は偶関数であり，そのグラフは y 軸に対して対称となるが，さらに $[\,0, \infty\,)$ では単調増加となっている (微分してみるとわかる)。従って，$\cosh x$ は $[\,0, \infty\,)$ に制限すると，$[\,0, \infty\,)$ から $[\,1, \infty\,)$ への全単射を与える。

また，$\sinh x$ は奇関数であり，そのグラフは原点に関して点対称である。$\sinh x$ は $\mathbb{R}$ 全体で単調増加であり (微分してみるとわかる)，実数全ての値をとるので，$\mathbb{R}$ からそれ自身への全単射を与える。

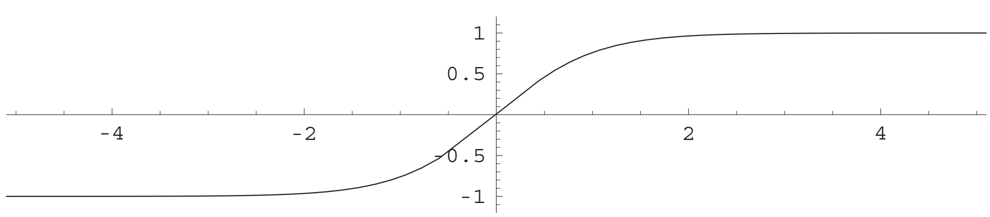
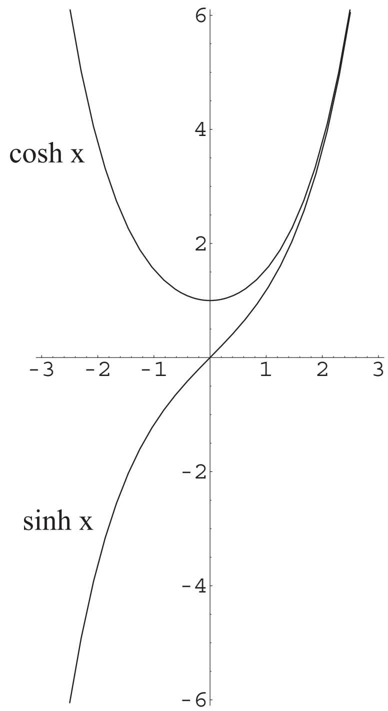


図 4.8: $\tanh x$ のグラフ

(1) $\cosh x$ を $\cos(hx)$ だと勘違いするものがいるが，括弧を用いて表すと $\cosh(x)$ であることに注意。



演習問題 4.10

(1) $\cosh x$ を $[\,0,\infty\,)$ に制限した関数の逆関数を $\cosh^{-1} x$ とする。これは $[\,1,\infty\,)$ から $[\,0,\infty\,)$ への関数である。

$$\cosh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

であることを示せ。

(2) $\sinh x$ の逆関数を $\sinh^{-1} x$ とする。これは $\mathbb{R}$ 全体で定義された関数である。

$$\sinh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

であることを示せ。

(3) $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ とする。任意の x に対して $|\tanh x| < 1$ を示せ。

(4) $\tanh x$ は単調増加関数であることを (微分を使わずに) 示せ。

$x \to -\infty$ のとき $\tanh x \to -1$ であり，$x \to \infty$ のとき $\tanh x \to 1$ であることがわかるので，

$\tanh x$ は $\mathbb{R}$ から $(-1, 1)$ への全単射を与える。従って，その逆写像 $\tanh^{-1} x$ は，$(-1, 1)$ 上で定義され，$\mathbb{R}$ 全体の値をとる単調増加関数となる。