数学序論要綱 #12　　2009–7–6　　河野

5　微分法

微分法の最初に数列及び関数の極限に簡単に関し復習しておく。

5.1　数列の極限

各自然数 n に対し，数 a_n が定められているとき $\{a_n\}$ を**無限数列**という (以下単に**数列**という)。n を限りなく大きくしたとき a_n がある一定の値 α に限りなく近づくとする。このとき数列 $\{a_n\}$ は α に**収束する**(1)といい，α をその**極限値**という。このとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

あるいは

$$a_n \to \alpha \quad (n \to \infty)$$

と書く。$\{a_n\}$ が収束しないとき，**発散する**という。発散するとき，$n \to \infty$ のときの a_n の挙動は様々であるが，特に $a_n \to \infty$ あるいは $a_n \to -\infty$ となるとき，$\pm\infty$ は数ではないが，便宜的に

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{または} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

と書く。

例 5.1 (1)　$a_n = \dfrac{1}{n}$ のとき，即ち

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

となる数列を考える。$n \to \infty$ としたとき，$\dfrac{1}{n}$ は 0 に近づく。即ち

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

が成立する。

(2)　$a_n = n^2$ とおくと a_n は収束しないが，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

である。

(3)　$a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ とおくと a_n は収束しない。また $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ も成立しない。

---

(1) これは直感的説明であり厳密な定義ではない。厳密には次に述べる「ε-N 論法」と呼ばれる方法で定義される。この講義ではこの論法に深入りはしない。数列 a_n が次を満たすとき「数列 a_n は α に収束する」といい，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と書く；$\forall\varepsilon(>0) \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ n > N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成立する。

(4) a を実数とする。$a_n = a^n$ とおくとき $\lim_{n\to\infty} a_n$ の収束・発散は，指数関数の所で学んだように，a の値によって異なり，次のようになっている。

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty \quad (\text{発散}) & a > 1 \\ 1 & a = 1 \\ 0 & -1 < a < 1 \\ \text{発散} & a \leqq -1 \end{cases}$$

定理 5.2 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ (α, β は有限値) のとき

(1) $\lim_{n\to\infty} (ka_n) = k \lim_{n\to\infty} a_n = k\alpha$

(2) $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha \pm \beta$

(3) $\lim_{n\to\infty} (a_n\, b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha\,\beta$

(4) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ 　(ただし $\beta \neq 0$ とする。)

が成立する。

(1)〜(4) は直感的には明らかであろうが[(2)]，たとえば (3) は次のことよりわかる。

$$\begin{aligned} \alpha\beta - a_n b_n &= (\alpha\beta - a_n\beta) + (a_n\beta - a_n b_n) \\ &= (\alpha - a_n)\beta + a_n(\beta - b_n) \end{aligned}$$

ここで $\{\, a_n \,\}$ は収束すると仮定したので，$|a_n|$ は有界，すなわちある定数 $K > 0$ より小さい ($|a_n| < K$)。よって $n \to \infty$ のとき

$$\begin{aligned} &|(\alpha - a_n)\beta| = |\alpha - a_n| \cdot |\beta| \to 0 && (\because |\alpha - a_n| \to 0) \\ &|a_n(\beta - b_n)| \leqq K|\beta - b_n| \to 0 && (\because |\beta - b_n| \to 0) \end{aligned}$$

よって $a_n b_n \to \alpha\beta$ $(n \to \infty)$ が成立する。 ∎

この定理により，数列の各項がいくつかの代数的結合 (和・差・積・商) で表されるときは，その各々の極限値がわかれば容易にその極限値はもとまる。しかし (4) において，$a_n, b_n \to 0$ $(n \to \infty)$ となる場合や，a_n, b_n が $\pm\infty$ に発散する場合は $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ は形式的には $\dfrac{0}{0}$ や $\dfrac{\infty}{\infty}$ となり，値が定まらないように見える (実際には収束する場合も発散する場合もある)。このような場合を**不定形**という。微積分においては不定形の極限が大事なことが多い。

例 5.3 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n+2}$ をもとめよ。

分子，分母は $n \to \infty$ のとき ∞ になるが，それらの比自体は有限値に収束することがありうる。この場合も n が十分大きければ，$n+2$ と n の比はほぼ 1，同様に $\sqrt{n^2+1}$ と $\sqrt{n^2} = n$ の比も同

[(2)] ここでも厳密には「ε-N 論法」で証明される。ここでの「証明」は厳密な意味では「証明」ではなく説明である。

様，したがって $\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n+1} \fallingdotseq 1$，$\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n+1} \to 1$ となることが予想される。実際

$$\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+2} = \frac{\sqrt{n^2+1} \times \dfrac{1}{n}}{(n+2) \times \dfrac{1}{n}} = \frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}{1+\dfrac{2}{n}} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

すなわち

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+2} = 1$$

である。

演習問題 5.1　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n-1}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+n+1}$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+3n+1}}{n+2}$ (4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n-1}$

これらの例・演習問題では分子・分母の増大度を比較的容易にくらべることができた。しかし一般には単純でない。よく分からない数列を知られた数列ではさむことにより数列の極限を求める方法が知られている。次の定理がそれである。

定理 5.4 [はさみうちの定理] 任意の自然数 n に対し

$$b_n \leqq a_n \leqq c_n$$

が成立しているとする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ のとき a_n も収束し，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

が成立する。

例 5.5 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \ (a > 0)$ を示せ。

$N > a$ となる自然数 N を 1 つ選んで固定する。$n > N$ とする。$k > N$ のとき $\dfrac{a}{k} < \dfrac{a}{N}$ が成立することに注意すると

$$\begin{aligned} 0 < \frac{a^n}{n!} &= \frac{a}{1}\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{N-1}\frac{a}{N}\cdots\frac{a}{n} \\ &< \frac{a}{1}\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{N-1}\underbrace{\frac{a}{N}\frac{a}{N}\cdots\frac{a}{N}}_{n-N+1\text{ 個}} = \frac{a}{1}\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{N-1}\left(\frac{a}{N}\right)^{n-N+1} \end{aligned}$$

という不等式が成立する。ここで $b_n = 0$，$c_n = \dfrac{a}{1}\dfrac{a}{2}\cdots\dfrac{a}{N-1}\left(\dfrac{a}{N}\right)^{n-N+1}$ と定義し，これに定理 5.4 を適用する。$\dfrac{a}{N} < 1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{N}\right)^{n-N+1} = 0$ となる。よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$ が得られる。 ∎

この例は $a^n \ (a > 1)$ の増大度より，$n!$ の増大度の方がさらに大きいことを意味する。

演習問題 5.2　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{2^n}=0$ を示せ。

(ヒント) $a_n=\dfrac{n^3}{2^n}$ とする。n を十分大きくすれば $\dfrac{1}{2}<r<1$ となる適当な r を選んで $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<r$ とできる。

$\dfrac{\infty}{\infty}$ や $\dfrac{0}{0}$ の形の不定形の他の不定形の極限としては $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$ のように $\infty-\infty$ の形などもある。

例 5.6 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\frac{1}{2}$

$$\sqrt{n^2+n}-n=\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1}\to\frac{1}{2}$$

(注，$\dfrac{\infty}{\infty}$ の形に変形してもとめた)

演習問題 5.3　次をもとめよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(n^2-2n\right)$

ここで指数関数の微分において重要な次の数列の極限を考える。

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

とすると $\{\,a_n\,\}$ は収束する(3)。その極限値を e と定める。

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(a+\frac{1}{n}\right)^n \tag{1}$$

e は無理数であり，

$$e=2.7182818\cdots$$

と近似されることが知られている。また e は

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots \tag{2}$$

と無限級数で表されることを解析学 I で学ぶ。

数列 (1) は収束が非常に遅く，数列 (2) は非常に早い。このことは演習問題 5.4 を解くことにより実感してほしい。

注：無限級数

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

とは，部分和，$S_0=1, S_1=1+\dfrac{1}{1!}, S_2=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!},\ldots,S_n=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!},\ldots$ で定まる数列 $\{\,S_n\,\}$ の極限値を意味する。

(3) このことは「単調増加数列 $\{\,a_n\,\}$ の各項がすべてある定数 K より小であるならば数列は収束する」という定理から導かれるがくわしい証明は省く。

演習問題 5.4　電卓等を使って数列 (2) の部分和を S_0 から S_{10} まで計算し，S_n がしだいに e に近づくことをたしかめよ。また $a_{10} = \left(1+\dfrac{1}{10}\right)^{10}, a_{100} = \left(1+\dfrac{1}{100}\right)^{100}, a_{1000} = \left(1+\dfrac{1}{1000}\right)^{1000}$ の値と比較せよ。

例 5.7 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) \to e\cdot 1 = 1 \quad (n\to\infty)$$

演習問題 5.5　次をもとめよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$

5.2　関数の極限

変数 x が a に (a と異なる値をとりながら) 限りなく近づくとき，関数 $f(x)$ の値がある数 A に限りなく近づくとする。このとき

$$\lim_{n\to a} f(x) = A$$

と書き，$x\to a$ のとき $f(x)$ は A に**収束する**という[(1)]。また A を $x\to a$ としたときの $f(x)$ の**極限値**という。

$x\to a$ のとき $f(x)$ の値が $\pm\infty$ となるとき $\pm\infty$ は数ではないが

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$$

と書くのは数列の場合と同様である。

変数 x が $x>a$ を満たしながら a に限りなく近づくとき，関数 $f(x)$ の値がある数 A に限りなく近づくとする。このとき

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = A$$

と書き，$x\to a+0$ のとき $f(x)$ は A に**収束する**という。また A を $x\to a+0$ としたときの $f(x)$ の**右側極限値**という。

変数 x が $x<a$ を満たしながら a に限りなく近づくとき，関数 $f(x)$ の値がある数 A に限りなく近づくとする。このとき

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = A$$

と書き，$x\to a-0$ のとき $f(x)$ は A に**収束する**という。また A を $x\to a-0$ としたときの $f(x)$ の**左側極限値**という。$a=0$ のとき $x\to 0+0$ を $x\to +0$ と $x\to 0-0$ を $x\to -0$ と略記することもある。

[(1)] これは直感的説明であり厳密な定義ではない。厳密には次に述べる「ε-δ 論法」と呼ばれる方法で定義される。この講義ではこの論法に深入りはしない。関数 f が次を満たすとき「$x\to a$ のとき $f(x)$ は A に収束する」といい，$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = A$ と書く；$\forall\varepsilon(>0)\in\mathbb{R}\ \exists\delta(>0)\in\mathbb{R}\ \forall x\in\mathbb{R}\ \ 0<|x-a|<\delta \implies |f(x)-A|<\varepsilon$ が成立する。

変数 x が限りなく大きくなるとき，関数 $f(x)$ の値がある数 A に限りなく近づくとする。このとき

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = A$$

と書き，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は A に**収束する**という[(2)]。

変数 x が限りなく小さくなるとき，関数 $f(x)$ の値がある数 A に限りなく近づくとする。このとき

$$\lim_{n\to-\infty} f(x) = A$$

と書き，$x \to -\infty$ のとき $f(x)$ は A に**収束する**という。

例 5.8 関数の極限に関するいくつかの例：

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}(x^2+3) = 4$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sin x = 0$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} = 3$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} 2^x = \infty$

数列の場合と同様に次の定理が成立する。

定理 5.9 $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = A$，$\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = B$ とする (A, B は有限値)。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\Big(kf(x)\Big) = k\lim_{x\to a} f(x) = kA$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\Big(f(x) \pm g(x)\Big) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = A \pm B$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a} g(x) = AB$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B}$　(ただし $B \neq 0$ とする)

証明は数列の場合と同様である。各自こころみよ。また定義より次のことも明らかであろう。

定理 5.10 $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = A$ とする。数列 $\{\,a_n\,\}$ が $a_n \neq a$ で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(a_n) = A$

$x \to a$ のとき $f(x), g(x) \to 0$ あるいは $f(x), g(x) \to \pm\infty$ となる場合 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ を考えよう。数列の場合と同様に形式的には $\dfrac{0}{0}$ あるいは $\dfrac{\infty}{\infty}$ で不定であるが，有限値に収束している場合もある。例 5.8 (3) はその例になっている。

ここで三角関数と指数関数の微分の基礎となる 2 つの極限値を紹介しておこう。証明は [*] 付きの演習問題とする。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \quad (\text{変数 } x \text{ はラジアンとする}) \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1 \tag{2}$$

(2) これは直感的説明であり厳密な定義ではない。厳密には次に述べる「ε-N 論法」と呼ばれる方法で定義される。この講義ではこの論法に深入りはしない。関数 f が次を満たすとき「$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は A に収束する」といい，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ と書く；$\forall\varepsilon(>0) \in \mathbb{R}\ \exists N(>0) \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ x > N \implies |f(x) - A| < \varepsilon$ が成立する。

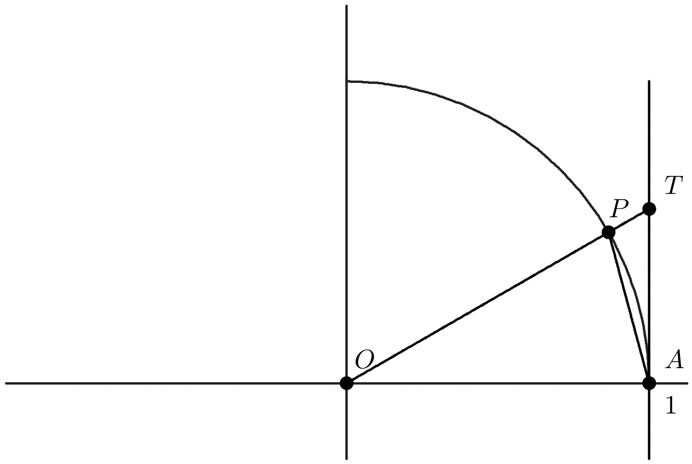

図 5.1

演習問題 5.6 (1) より次を示せ。

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

演習問題 *5.7

(1) 図 5.1 を参考にして $x > 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を示せ。

(2) $x = -t$ とおくことにより $\displaystyle\lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を示せ。

(1)，(2) より $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ が示される。

(3) $\displaystyle\lim_{t \to \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$ を示せ。

(4) $\displaystyle\lim_{t \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$ を示せ。

(5) $\displaystyle\lim_{u \to 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}} = e$ を示せ。

(6) $x = \log(1 + u)$ とおくことにより $\displaystyle\frac{e^x - 1}{x} = 1$ を示せ。