数学序論要綱 #13　　2009–7–9　　河野

5.3 定義と基本性質

関数 f の導関数 f' は (存在する場合) 次の式で定義されるものであった。

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

x においてこの極限が存在するとき，f は x で**微分可能** (*differentiable*) であるという。定義域の各点で微分可能であるとき，関数 f は**微分可能** (*differentiable*) であるという。ただし f の定義域が閉区間 I のとき区間の左端の点 a で微分可能とは次の右極限が存在する場合をいう事とする。

$$f'_+(a) = \lim_{h \to +0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

右端の点の場合は次の左極限の存在する場合をいう。

$$f'_-(a) = \lim_{h \to -0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$y = f(x)$ の導関数の表し方は次のように色々ある。前 2 つはニュートン流，後ろ 4 つはライプニッツ流である。

$$y',\ f'(x),\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df(x)}{dx},\ \frac{df}{dx}(x),\ \frac{d}{dx}f(x)$$

幾何的には $y = f(x)$ のグラフの，その点における接線の傾きを表す。この言い方は数学的には厳密でないかもしれない。厳密には導関数を用いて接線を定義する。

微分とは線型近似 (1 次近似) であるという見方は大切である。f は微分可能とする。今 x を任意に固定して h を変数と考える。$\varepsilon(h) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)$ とおくと $h \to 0$ のとき $\varepsilon(h) \to 0$ となる。つまり

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \varepsilon(h)h$$

において h が非常に小さいとき，$\varepsilon(h)h$ は (**非常に**)^2 小さいと考えられる。この項を無視した残りの項が $f(x)$ を近似しているという見方が線型近似である。

逆に微分可能な関数 $f(x+h)$ を h に関する 1 次式 $Ah + B$ で「近似」する事を考える。$h = 0$ において 1 次関数の値が $f(x)$ になる必要があるので $B = f(x)$ が従う。関数 $f(x+h)$ と 1 次関数の差を $\varepsilon(h)h$ と置く。即ち $\varepsilon(h)h = f(x+h) - (Ah + f(x))$ とすると，

$$\varepsilon(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - A \to 0 \qquad (h \to 0)$$

となる。よって $A = f'(x)$ のとき「近似」が一番「よい」事が分かる。

関数 $y = f(x)$ が $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ となるとき「関数 $y = f(x)$ は a において**連続**である」という。定義域の各点で連続であるとき，関数 $y = f(x)$ は**連続**であるという。上の考察から微分可能な関数は連続であることが分かる。

演習問題 5.8　$x = a$ で微分可能な関数は $x = a$ において連続であることを証明せよ。

例 5.11 $f(x)=x^2$ とする。$f(x)$ の導関数を求めよう。

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x
\end{aligned}$$

演習問題 5.9　定義に基づいて次の関数の導関数を求めよ。

(1) $f(x)=x$　　(2) $f(x)=x^3$

(3) $f(x)=x^2+x+1$　　(4) $f(x)=a$

(5) $f(x)=x^4$　　(6) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

定義に基づいて計算するのは関数が複雑になると大変である。そこでいくつかの定理を用意して複雑な関数の計算を実行できるようにする。

定理 5.12 関数 $f(x), g(x)$ は微分可能とし，a は定数とする。

(1) $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

(2) $(af(x))' = af'(x)$

(3) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(4) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}$　　(ただし $g(x)\neq 0$ とする。)

証明

(1)

$$\begin{aligned}
\big(f(x)\pm g(x)\big)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\big(f(x+h)\pm g(x+h)\big)-\big(f(x)\pm g(x)\big)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\pm\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\} = f'(x)\pm g'(x)
\end{aligned}$$

(2) $\big(kf(x)\big)' = \lim_{h\to 0}\dfrac{kf(x+h)-kf(x)}{h} = k\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = kf'(x)$

(3)

$$\begin{aligned}
\big(f(x)g(x)\big)' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\big(f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)\big)+\big(f(x)g(x+h)-f(x)g(x)\big)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\} \\
&= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

(4)

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right\}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{\big(f(x+h)g(x) - f(x)g(x)\big) + \big(f(x)g(x) - f(x)g(x+h)\big)}{g(x+h)g(x)}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x) - f(x)\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)}$$
$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad \blacksquare$$

定理 5.13 [**合成関数の微分法**]　関数 $y = f(x)$ と $z = g(y)$ が共に微分可能で合成関数 $z = g\circ f(x) = g(f(x))$ が定義されるとき

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

が成立する。

定理 5.14 [**逆関数の微分法**]　ある区間 I または実数 $\mathbb{R}$ 全体でで定義された関数 f が微分可能かつ単調であるとき，逆関数は微分可能で導関数は

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

演習問題 5.10　テキストを参考にして，定理 5.12, 5.13, 5.14 を証明せよ。

5.4　いろいろな関数とその導関数

今まで出てきた関数の導関数を確認しておこう。

1) 整関数　多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ を考える。実数上の関数で x に対し $f(x)$ を対応させる関数を f と書く (関数 $y = f(x)$ と書く場合もある)。これを**整関数**または**多項式関数**という。定理 5.12 (3) より

$$f'(x) = a_n\big(x^n\big)' + a_{n-1}\big(x^{n-1}\big)' + \cdots + a_1\big(x\big)' + \big(a_0\big)'$$

となるので，$(x^k)'$ が分かれば導関数が求められる。ここでは定理 5.12 (3) と $\big(x\big)' = 1$ (演習問題参照) を用いて次数の低い所から計算してみよう。$x^2 = x\cdot x$ に定理 5.12 (3) を適用して

$$\big(x^2\big)' = \big(x\cdot x\big)' = x'\cdot x + x\cdot x' = 1\cdot x + x\cdot 1 = 2x$$

となる。$x^3 = x^2 \cdot x$ に定理 5.12 (3) を適用すると

$$\left(x^3\right)' = \left(x^2 \cdot x\right)' = \left(x^2\right)' \cdot x + x^2 \cdot x' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2$$

が得られる。$x^4 = x^3 \cdot x$ に定理 5.12 (3) を適用すると

$$\left(x^4\right)' = \left(x^3 \cdot x\right)' = \left(x^3\right)' \cdot x + x^3 \cdot x' = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1 = 4x^3$$

が得られる。任意の自然数 n に対し $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$ が予想されるが，これは演習問題にする。

演習問題 5.11　任意の自然数 n に対して $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$ が成立する事を数学的帰納法で示せ。

2) **有理関数**　$f(x)$, $g(x)$ を多項式とする。$Q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ となる式 $Q(x)$ を有理式という。有理式で定義される関数を**有理関数**という。ただしこの関数は分母 $g(x)$ が 0 となる x では定義されない。すなわち定義域は実数全体とは限らない。定理 5.12 (4) を用いると有理関数の導関数は

$$Q'(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

となり，$f'(x), g'(x)$ は多項式の導関数なので求める事ができる。

演習問題 5.12　次の有理関数の導関数を求めよ。
(1) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$　　(2) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$　　(3) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$

3) **無理関数**　ここでは**無理関数**一般でなく n 乗根について述べる。$y = f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ は $x = y^n$ $(y \geqq 0)$ の逆関数であった。$\dfrac{dx}{dy} = ny^{n-1}$ なので定理 5.14 より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

となる。無理関数は整関数，有理関数と違って微分可能でない点が存在する。即ち定義域の端点では微分可能ではない。

演習問題 5.13　n を自然数，m を整数とする。$u = x^{\frac{1}{n}}$，$y = u^m$ とおく。合成関数の導関数 (定理 5.13) を用いて関数 $y = x^{\frac{m}{n}}$ の導関数を求めめ，その導関数が $y' = \left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \dfrac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$ の形をしていることを確かめよ。

4) **指数関数**　5.1 節において e という定数を定義し，5.1 節および 5.2 節の演習問題において極限に関するいくつかの結果を証明した。この定数 e は**自然対数の底**と呼ばれる重要な定数であり，指数関数の導関数を考えるためには不可欠の定数である。最初に $y = f(x) = e^x$ の導関数を求め，その後で一般の正数 a に対し $y = f(x) = a^x$ の導関数を求める。指数関数の導関数を求めるときキーポイントになる式は

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

である。$y=f(x)=e^x$ とおくと

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h-1}{h} = e^x \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = e^x
\end{aligned}
$$

となる。即ち $\left(e^x\right)'=e^x$ が成立している。逆にこのような性質を持つ実数は e のみである。

一般の a に対しては，$a=e^k$ とおくと，$k=\log_e a$ である。また $y=f(x)=a^x=\left(e^k\right)^x=e^{kx}$ となっている。よって

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{k(x+h)}-e^{kx}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{kx+kh}-e^{kx}}{h} = \lim_{h\to 0} e^{kx}\frac{e^{kh}-1}{h} \\
&= a^x \lim_{h\to 0}\frac{e^{kh}-1}{kh}k = a^x k \lim_{kh\to 0}\frac{e^{kh}-1}{kh} = a^x k = a^x \log_e a
\end{aligned}
$$

を得る。

5) 対数関数　e を底とする対数を**自然対数**といい，微積分では底を省略する(1)。対数関数は指数関数の逆関数として定義されたので，$y=\log x$ のとき $x=e^y$ となる。$\dfrac{dx}{dy}=e^y$ なので

$$
\left(\log x\right)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}
$$

となる。

$y=\log_a x$ のとき $x=a^y$ となる。$\dfrac{dx}{dy}=a^y\log a$ なので，

$$
(\log_a x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{a^y\log a} = \frac{1}{x\log a}
$$

となる。

6) 三角関数　三角関数の導関数を求めるときキーポイントになる式は

$$
\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1
$$

である。$\sin x$ に関する加法定理を用いると

$$
\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \sin x\frac{\cos h-1}{h} + \cos x\frac{\sin h}{h}
$$

となる。$\dfrac{\cos h-1}{h} = -\dfrac{\sin^2 h}{h(\cos h+1)}$ に注意すると，$(\sin x)'=\cos x$ を得る。

$\cos x = \sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$，$-\sin x = \cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ に注意すると，$(\cos x)' = -\sin x$ が得られる。$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ であるから，$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ が得られる。

(1)微積分では底を省略すると，自然対数であるが，数値計算においては底を省略すると**常用対数** (底が 10 である対数) であるのが普通なので注意すること。

7) 逆三角関数　逆正弦関数 $y = \arcsin x$ は $y = \sin x$ $(-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2})$ の逆関数として定義された。よって「$y = \arcsin x \iff x = \sin y$ $(-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2})$」が成立する。$\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$ より

$$(\arcsin x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

を得る。

逆余弦関数 $y = \arccos x$ に対して,「$y = \arccos x \iff x = \cos x\,(0 \leqq x \leqq \pi)$」が成立する。導関数は $\arcsin x$ のときと同じ様に計算すると

$$(\arccos x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

となる。

逆正接関数 $\arctan x$ に対しては「$y = \arctan x \iff x = \tan y$ $(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$」が成立する。$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$ より

$$(\arctan x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1+x^2}$$

が分かる。

演習問題 5.14　次の関数の導関数を定義に基づいて求めよ。ただし次の極限値は用いてよい。

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1 \qquad \lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1$$

(1) $y = x^3$　　(2) $y = \frac{x+1}{x^2+1}$

(3) $y = \cos 2x$　　(4) $y = \log x$

演習問題 5.15　次の関数の導関数を求めよ (諸公式を用いてよい)。

(1) $x^2 + 3x + 2$　　(2) $3\sin x + 2e^x$

(3) $y = xe^x$　　(4) $y = \sin^{100} 2x$

(5) $y = x^3 \log(2x^3 + x)$　　(6) $y = \arcsin(x^2 + 1)$

(7) $(x^2 + 2)(x^2 + 3)$　　(8) $\sin(3x + 1)$

(9) $e^x \sin x$　　(10) $^{(2)}y = x^x$

演習問題 5.16　次を示せ。

$$y = \log|x|\ (x \neq 0)\ \text{とおくと}\ y' = \frac{1}{x}$$

演習問題 5.17　次を示せ。

$$\left\{x\arctan x - \frac{1}{2}\log(x^2+1)\right\}' = \arctan x$$

最後に合成関数の微分公式の応用として対数微分法を説明する。

例 5.15 $y = x^x$ $(x > 0)$ を微分せよ。
両辺の対数をとると

$$\log y = \log x^x = x\log x$$

両辺を x で微分して

$$\frac{y'}{y} = \big(x\big)'\log x + x\big(\log x\big)' = \log x + 1$$

$$\because y' = y(\log x + 1) = x^x(\log x + 1)$$

例 5.16 $y = x^\alpha$ $(x > 0$，α は任意の実数$)$ とするとき

$$y' = ax^{\alpha-1}$$

実際，$\log y = \alpha\log x$ の両辺を x で微分し

$$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x}$$

$$\because y' = \alpha x^\alpha x^{-1} = \alpha x^{\alpha-1}$$

これよりたとえば

$$\big(\sqrt[3]{x}\big)' = \big(x^{\frac{1}{3}}\big)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\big(\sqrt{1+x^2}\big)' = \left\{\big(1+x^2\big)^{\frac{1}{2}}\right\}' = \frac{1}{2}\big(1+x^2\big)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

等の計算が正当化される。このように両辺の対数をとって微分することを対数微分法といい，$\{f(x)\}^{g(x)}$ の形の関数の微分計算において有効である。

演習問題 5.18　対数微分法をもちいて次の微分をもとめよ。

(1) $x^{\sin x}$　　(2) $\sqrt{\dfrac{(x^2+2)^2}{(x^2+3)^3}}$