

演習問題 1.6 次の命題の否定命題をつくれ。また真偽を判定せよ。ここで \mathbb{R} は実数全体からなる集合であり、 \mathbb{C} は複素数全体からなる集合とする。

- (1) $\forall x \in \mathbb{R} \ x^2 \geq 0$ (2) $\forall x \in \mathbb{C} \ x^2 \geq 0$
 (3) $\forall x \in \mathbb{R} \ x^4 - x^2 + \frac{1}{4} \geq 0$ (4) $\forall x \in \mathbb{R} \ x^4 - x^2 + \frac{1}{5} \geq 0$
 (5) $\exists x \in \mathbb{R} \ x^4 - x^2 + \frac{1}{5} \leq 0$ (6) $\exists x \in \mathbb{R} \ (x - 2x^2 > 0 \wedge x < 0)$

(1) 否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{R} \ x^2 < 0$ 」である。任意の実数に対し $x^2 \geq 0$ が成立するので 1.6 (1) は正しい命題であり、否定命題は正しくない命題である。

(2) 否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{C} \ x^2 < 0$ 」である。複素数 i は $i^2 = -1 < 0$ なので否定命題は正しい命題である。よって 1.6 (2) は偽である。

(3) 否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{R} \ x^4 - x^2 + \frac{1}{4} < 0$ 」である。 $x^4 - x^2 + \frac{1}{4} = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ なので 1.6 (3) は正しい命題であり、否定命題は正しくない命題である。

(4) 否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{R} \ x^4 - x^2 + \frac{1}{5} < 0$ 」である。 $x^4 - x^2 + \frac{1}{5} = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{20}$ が成立する。 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ とすると、 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{5} = -\frac{1}{20} < 0$ となるので否定命題は正しい命題である。よって 1.6 (4) は偽である。

(5) 否定命題は「 $\forall x \in \mathbb{R} \ x^4 - x^2 + \frac{1}{5} > 0$ 」である。(4) の (反) 例は (5) の例にもなっているので、1.6 (5) は正しい。

(6) 否定命題は「 $\forall x \in \mathbb{R} \ (x - 2x^2 \leq 0 \vee x \geq 0)$ 」である。 $x - 2x^2 = x(1 - 2x) > 0 \iff 0 < x < \frac{1}{2}$ なので $x - 2x^2 > 0$ かつ $x < 0$ となる実数 x は存在しない。よって 1.6 (6) は偽である。

演習問題 1.7 a, b は与えられた実数とする。

$$\text{任意の } x \in \mathbb{R} \text{ に対し } a < x \implies b < x$$

の否定命題をつくれ。またこの命題の意味を考えることにより、 a と b がどのような関係にあるとき真になるか考察せよ。

$$\forall x \in \mathbb{R} \ a > x \implies b > x$$

についても同様に否定命題をつくり考察せよ。

命題

$$\forall x \in \mathbb{R} \ a < x \implies b < x$$

を P する。否定命題 $\neg P$ は

$$\exists x \in \mathbb{R} \ a < x \wedge x \leq b$$

である。否定命題 $\neg P$ が正しいとき $a < b$ が成立する。逆に $a < b$ が正しいとき $x = \frac{a+b}{2}$ とおくと x は $a < x < b$ を満たす。このとき $\neg P$ も真であることが分かる。よって「 $a < b$ 」は $\neg P$ と同値である。以上によりもとの命題 P は「 $a < b$ 」の否定、即ち「 $a \geq b$ 」と同値であることが分かる。

命題

$$\forall x \in \mathbb{R} \ a > x \implies b > x$$

を Q とする。否定命題 $\neg Q$ は

$$\exists x \in \mathbb{R} \ a > x \wedge x \geq b$$

である。否定命題 $\neg Q$ が正しいとき $a > b$ が成立する。逆に $a > b$ が正しいとき $x = \frac{a+b}{2}$ とおくと x は $a > x > b$ をみたす。このとき $\neg Q$ は真である。よって「 $a > b$ 」は $\neg Q$ と同値である。以上によりもとの命題 Q は「 $a > b$ 」の否定、即ち「 $b \geq a$ 」と同値であることが分かる。

演習問題 1.8 「 $P(x, y) : x > y$ 」とするとき「 $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \ P(x, y)$ 」と「 $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} \ P(x, y)$ 」の真偽を考察せよ。

「任意」と「存在」の入った命題を考えるときは、相手と2人ゲームをやっていると考えるのも1つの方法である。「任意」は相手が指定してくるもの、「存在」は自分が指定するものと考えて $P(x, y)$ が成立したら自分の勝ちと考える分けである。前者の「 $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \ P(x, y)$ 」は相手が先手で何か x を指定してくるのに対し $x > y$ が成立するように y を選べるかという問題である。後者は自分でうまく y を選んで相手が x をどのようにえらんでも $x > y$ を成立させることができるかという問題である。

前者は任意の x に対し $y = x - 1$ を選ぶことができる。前者は正しい命題である。後者は自分が y をどのように選んでも、相手が $x = y - 1$ を選ぶと $x > y$ を成立させることができない。よって後者は間違った命題である。

後者を示すのに否定命題「 $\forall y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} \ x \leq y$ 」を考えそれが真であることを示してもよい。

演習問題 1.9 次の命題の否定命題をつくれ。またもとの命題の真偽を確かめよ。

- | | |
|--|---|
| (1) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \ x < y$ | (2) $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \ x < y$ |
| (3) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \ x < y$ | (4) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \ x < y$ |
| (5) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \ x^2 + y^2 \geq 0$ | (6) $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \ x^2 + y^2 = 0$ |

命題の真偽を調べるときは、元の命題の真偽を調べてもよいし、否定命題の真偽を調べてもよい。どちらか一方の真偽を調べれば十分である。

(1) 否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \ x \geq y$ 」である。 $x = 1, y = 0$ を選べば否定命題は成立する。よって元の命題は正しくない。

(2) 否定命題は「 $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \ x \geq y$ 」である。 $x = 0, y = 1$ を選べば元の命題が正しいことが分かる。

(3) 否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \ x \geq y$ 」である。ここでは参考のため、元の命題と否定命題の両方の真偽を示そう。最初は元の命題；任意の実数 x に対し $y = x + 1$ とおく。このとき $x < y$ が成立するので元の命題は正しい命題であることが分かる。否定命題；背理法で示す。否定命題が正しいとすると実数 x が存在して任意の実数 y に対し $x \geq y$ が成立する。 y は任意なので特に

$y = x + 1$ を選ぶと $x \geq x + 1$ が成立し、両辺から x を引くことで $0 \geq 1$ が成立するが、これは矛盾である。よって否定命題は正しくない。

(4) 否定命題は「 $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} x \geq y$ 」である。任意の実数 x に対し $y = x$ を選ぶと否定命題の成立が分かる。よって元の命題は正しくない。

(5) 否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} x^2 + y^2 < 0$ 」である。任意の実数 x に対し $x^2 \geq 0$ が成立する。同様に任意の実数 y に対し $y^2 \geq 0$ が成立する。よって $x^2 + y^2 \geq 0$ が成立するので元の命題は正しい。

(6) 否定命題は「 $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} x^2 + y^2 \neq 0$ 」である。 $x = 0, y = 0$ を選ぶと $x^2 + y^2 = 0^2 + 0^2 = 0$ で元の命題が正しいことが分かる。