数学序論問題解説 #3

河野

演習問題 1.10　次において P は Q の，1) 必要十分条件，2) 必要条件ではあるが十分条件ではない，3) 十分条件ではあるが必要条件ではない，4) 必要条件でも十分条件でもない，のいずれかであるか決定せよ。ここで x, y は実数とする。

(1) $P : x^2 = 1$,　$Q : x = 1$
(2) $P : xy > 0$,　$Q : x > 0$ かつ $y > 0$
(3) $P : xy > 0$,　$Q : x > 0$ または $y > 0$
(4) $P : xy = 0$,　$Q : x = 0$ かつ $y = 0$
(5) $P : xy = 0$,　$Q : x = 0$ または $y = 0$
(6) $P : xy = 0$ かつ $y = x + 1$,　$Q : x = 0$ かつ $y = 1$
(7) $P : x^2 + 2x - 1 = 0$ かつ $x > 0$,　$Q : x = -1 + \sqrt{2}$

(1)　$Q \Longrightarrow P$ は正しい (このことの証明は不要であろう)。$P \Longrightarrow Q$ は $x = -1$ という反例があるので正しくない。よって P は Q であるための必要条件であるが十分条件ではない。
(2)　$Q \Longrightarrow P$ は正しい。$P \Longrightarrow Q$ は $x = -1$ かつ $y = -1$ という反例があるので正しくない。よって P は Q であるための必要条件であるが十分条件ではない。
(3)　$P \Longrightarrow Q$ は $x = -1$ かつ $y = -1$ という反例があるので正しくない。$Q \Longrightarrow P$ は $x = 1$ かつ $y = -1$ という反例があるので正しくない。よって P は必要条件でも十分条件でもない。
(4)　$Q \Longrightarrow P$ は正しい。$P \Longrightarrow Q$ は $x = 0$ かつ $y = 1$ という反例があるので正しくない。よって P は必要条件である。
(5)　積の性質から P は Q の必要十分条件である。
(6)　$Q \Longrightarrow P$ は正しい。$P \Longrightarrow Q$ は $x = -1$ かつ $y = 0$ という反例があるので正しくない。よって P は必要条件であるが十分条件ではない。
(7)　$-1+\sqrt{2} > 0$ かつ $(-1+\sqrt{2})^2+2(-1+\sqrt{2})-1 = 0$ なので $Q \Longrightarrow P$ は正しい。$x^2+2x-1 = 0$ の必要十分条件は $x = -1 + \sqrt{2}$ または $x = -1 - \sqrt{2}$ である。このなかで正の数は $-1 + \sqrt{2}$ のみである。よって $P \Longrightarrow Q$ は正しい。P は必要十分条件である。

演習問題 1.11　次の連立方程式の解を求めよ。

(1) $x(x^2 + y^2) = 0$ かつ $y(x^2 + y^2 - 1) = 0$
(2) $x^3 - x + y = 0$ かつ $y^3 + x - y = 0$
(3) $(y - 2x^2y)2^{-x^2-y^2} = 0$ かつ $(x - 2xy^2)2^{-x^2-y^2} = 0$

(1)　$x(x^2 + y^2) = 0$ である必要十分条件は $x = 0$ または $x^2 + y^2 = 0$ である。$x^2 + y^2 = 0$ である必要十分条件は $(x, y) = (0, 0)$ である。よって $x(x^2 + y^2) = 0$ である必要十分条件は $x = 0$ または $(x, y) = (0, 0)$ であるが，これは $x = 0$ と同値である。

$\vee$, $\Longleftrightarrow$ 等の記号を用いた方が分かりやすいかもしれないので，上のことを記号を用いて書いておく。

$$\begin{aligned} x(x^2 + y^2) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (x = 0) \vee (x^2 + y^2) = 0 \\ x^2 + y^2 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (x, y) = (0, 0) \end{aligned}$$

なので

$$(x=0)\vee(x^2+y^2)=0 \iff (x=0)\vee(x,y)=(0,0) \iff x=0$$

となる。

よって与えられた連立方程式は連立方程式

$$(x=0)\ \wedge\ \left(x^2+y^2-1=0\right)$$

と同値である。$x=0$ を 2 番目の式に代入すると $y(y^2-1)=0$ となり，$y=0$ または $y=1$ または $y=-1$ となる。

これらの解を最初に式に代入すると式は成立する。よって求める解は $(x,y)=(0,0)$ または $(x,y)=(0,1)$ または $(x,y)=(0,-1)$ である。

(2) $x^3-x+y=0$ を 1 式，$y^3+x-y=0$ を 2 式とする。1 式と 2 式を加えると $x^3+y^3=0$ を得る。$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=0$ なので

$$x^3+y^3=0 \iff \left(x+y=0\ \vee\ x^2-xy+y^2=0\right)$$

が成立している。

$$x^2-xy+y^2=\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2$$

なので

$$x^2-xy+y^2=0 \iff \left(x-\frac{1}{2}y=0\ \wedge\ y=0\right) \iff (x=0\ \wedge\ y=0)$$

となる。よって

$$\left(x+y=0\ \vee\ x^2-xy+y^2=0\right) \iff (x+y=0\ \vee\ (x,y)=(0,0)) \iff x+y=0$$

が成立するので

$$x^3+y^3=0 \iff x+y=0$$

が分かる。この式を 3 式とすると

$$1\text{ 式かつ }2\text{ 式} \iff 1\text{ 式かつ }3\text{ 式}$$

が成立するので，1 式と 3 式からなる連立方程式を解けばよいことが分かる。3 式を 1 式に代入することにより $x^3-2=0$ が得られる。$x^3-2x=x(x^2-2)=x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$ なので $x=0,\sqrt{2},-\sqrt{2}$ となる。

これらの解を最初に式に代入すると式は成立する。よって解は $(x,y)=(0,0),(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ である。

(3) 指数関数は 0 になることはないので連立方程式は $y-2x^2y=0$ (1 式) かつ $x-2xy^2=0$ (2 式) と考えることができる。

$$\begin{aligned} y-2x^2y=y(1-2x^2)=0 &\iff y=0\text{ または }1-2x^2=0 \\ x-2xy^2=x(1-2y^2)=0 &\iff x=0\text{ または }1-2y^2=0 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} 1\text{ 式かつ }2\text{ 式} \iff\ & (1)\ x=0\text{ かつ }y=0\text{，または} \\ & (2)\ x=0\text{ かつ }1-2x^2=0\text{，または} \\ & (3)\ 1-2y^2=0\text{ かつ }y=0\text{，または} \\ & (4)\ 1-2y^2=0\text{ かつ }1-2x^2=0 \end{aligned}$$

が成立する。(1) のときは $(x,y)=(0,0)$ になる。(2) のときは $x=0$ を $1-2x^2=0$ を代入すると $1=0$ が成立する。これは矛盾なのでこのとき解は存在しない。(3) のとき $y=0$ を $1-2y^2=0$ を代入すると $1=0$ が成立する。これは矛盾なのでこのとき解は存在しない。(4) のときは $1-2x^2=0$ より $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$，$1-2y^2=0$ より $y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。

これらの解を最初に式に代入すると式は成立する。以上により

$$(x,y)=(0,0),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

を得る。