数学序論問題解説 #4

河野

演習問題 1.12　次の命題を数学的帰納法により証明せよ。ただし n は自然数とする。(5) においては積の導関数の公式 $\left[\ (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\ \right]$ を使用してよい。

(1) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(2) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

(3) $n(n^2+2)$ は 3 で割り切れる。

(4) $h \geqq 0$ のとき $(1+h)^n \geqq 1 + nh$ である。

(5) $y = x^n$ の導関数は $y' = nx^{n-1}$ である。

(1)　命題を $P(n)$ とおく。

(A) $\dfrac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = 1 = 1^2$ なので $P(1)$ は成立している。

(B) $P(k)$ の成立を仮定する。即ち $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ の成立を仮定する。この両辺に $(k+1)^2$ を加えると，

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= (k+1)\left(\frac{k(2k+1)}{6} + k + 1\right) \\
&= (k+1)\frac{2k^2 + k + 6k + 6}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\
&= \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

となる。よって $P(k+1)$ も成立している。数学的帰納法によりすべての自然数 n に対し $P(n)$ が成立する。

(2)　命題を $P(n)$ とおく。

(A) $\left(\dfrac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1 = 1^3$ なので $P(1)$ は成立している。

(B) $P(k)$ の成立を仮定する。即ち $1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = \left(\dfrac{k(k+1)}{2}\right)^2$ の成立を仮定する。この両辺に $(k+1)^3$ を加えると，

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 &= \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 \\
&= (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right) \\
&= (k+1)^2\frac{k^2 + 4k + 4}{4}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\
&= \left(\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}\right)^2
\end{aligned}
$$

となる。よって $P(k+1)$ も成立している。数学的帰納法によりすべての自然数 n に対し $P(n)$ が成立する。

(3) 命題を $P(n)$ とおく。

(A) $1(1^2+2)=3$ であり，3 は 3 で割り切れるので $P(1)$ は成立している。

(B) $P(k)$ の成立を仮定する。このとき $k(k^2+2)$ は 3 で割り切れる。すなわちある整数 N が存在して $k(k^2+2)=3N$ と書くことができる。

$$
\begin{aligned}
(k+1)((k+1)^2+2) &= (k+1)(k^2+2k+3) = k^3+3k^2+5k+3 \\
&= k(k^2+2)+3k^2+3k+3 \\
&= k(k^2+2)+3(k^2+k+1) \\
&= 3\left(N+k^2+k+1\right)
\end{aligned}
$$

よって $(k+1)((k+1)^2+2)$ も 3 で割り切れるので $P(k+1)$ も成立している。数学的帰納法によりすべての自然数 n に対し $P(n)$ が成立する。

(4) 命題を $P(n)$ とおく。

(A) $P(1)$ は $(1+h)^1 \geqq 1+1\cdot h$ なので成立している。

(B) $P(k)$ の成立を仮定する。すなわち $(1+h)^k \geqq 1+kh$ の成立を仮定する。

$$
\begin{aligned}
(1+h)^{k+1} &= (1+h)^k(1+h) \geqq (1+kh)(1+h) \\
&= 1+(k+1)h+kh^2 \geqq 1+(k+1)h
\end{aligned}
$$

となる。よって $P(k+1)$ も成立している。数学的帰納法によりすべての自然数 n に対し $P(n)$ が成立する。

(5) 命題を $P(n)$ とおく。

(A)

$$
\begin{aligned}
(x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 1 = 1
\end{aligned}
$$

なので $(x^1)' = 1 = 1x^0 = 1x^{1-1}$ となり $P(1)$ は成立している。

(B) $P(k)$ の成立を仮定する。すなわち $(x^k)' = kx^{k-1}$ の成立を仮定する。このとき

$$
\begin{aligned}
(x^{k+1})' &= \left(x^k x\right)' = \left(x^k\right)' x + x^k (x)' = kx^{k-1}x + x^k\cdot 1 \\
&= kx^k + x^k = (k+1)x^k = (k+1)x^{(k+1)-1}
\end{aligned}
$$

となるので，$P(k+1)$ も成立している。数学的帰納法によりすべての自然数 n に対し $P(n)$ が成立する。

演習問題 1.13　次の命題を数学的帰納法により証明せよ。ただし n は自然数とする。

(1) 漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ を満たし，$a_1 = p,\ a_2 = q$ を満たす数列は

$$a_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}$$

であることを示せ。ただし $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ A = \dfrac{q-p\beta}{\alpha-\beta},\ B = \dfrac{p\alpha-q}{\alpha-\beta}$ とする。

(2) 漸化式 $a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n$ を満たし，$a_1 = 3,\ a_2 = 6,\ a_3 = 14$ を満たす数列は

$$a_n = 1 + 2^{n-1} + 3^{n-1}$$

であることを示せ。

(1)　$a_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}$ が成立するという命題を $P(n)$ とする。

(A)

$$\begin{aligned} A\alpha^{1-1} + B\beta^{1-1} &= A + B = \frac{q-p\beta}{\alpha-\beta} + \frac{p\alpha-q}{\alpha-\beta} \\ &= \frac{p(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta} = p = a_1 \end{aligned}$$

なので $P(1)$ は成立している。

(B)

$$\begin{aligned} A\alpha^{2-1} + B\beta^{2-1} &= A\alpha + B\beta = \frac{q-p\beta}{\alpha-\beta}\alpha + \frac{p\alpha-q}{\alpha-\beta}\beta \\ &= \frac{q\alpha - p\beta\alpha + p\alpha\beta - q\beta}{\alpha-\beta} = \frac{q(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta} \\ &= q = a_2 \end{aligned}$$

なので $P(2)$ は成立している。

(C) $P(k)$ および $P(k+1)$ の成立を仮定する。

$$\begin{aligned} a_{k+2} &= a_{k+1} + a_k = A\alpha^k + B\beta^k + A\alpha^{k-1} + B\beta^{k-1} \\ &= A(\alpha^k + \alpha^{k-1}) + B(\beta^k + \beta^{k-1}) \\ &= A\alpha^{k-1}(\alpha+1) + B\beta^{k-1}(\beta+1) \end{aligned}$$

が成立する。ここで $\alpha,\ \beta$ は $\alpha+\beta = 1,\ \alpha\beta = -1$ を満たすので $x^2 - x - 1 = 0$ の 2 解である。よって $\alpha^2 = \alpha + 1,\ \beta^2 =^b eta + 1$ が成立する。ここでは 2 次方程式の解と係数の関係を用いたが直接計算してもよい。よって上式は $A\alpha^{(k+2)-1} + B\beta^{(k+2)-1}$ となり $P(k+2)$ の成立が示される。数学的帰納法によりすべての自然数 n に対し $P(n)$ が成立する。

(2)　$a_n = 1 + 2^{n-1} + 3^{n-1}$ が成立するという命題を $P(n)$ とする。

(A)

$$1 + 2^{1-1} + 3^{1-1} = 1 + 1 = 3 = a_1$$

なので $P(1)$ は成立している。

(B)

$$1 + 2^{2-1} + 3^{2-1} = 1 + 2 + 3 = 6 = a_2$$

なので $P(2)$ は成立している。
(C)

$$1 + 2^{3-1} + 3^{3-1} = 1 + 4 + 9 = 14 = a_3$$

なので $P(3)$ は成立している。
(C) $P(k)$ および $P(k+1)$，$P(k+2)$ の成立を仮定する。 このとき

$$\begin{aligned}
a_{k+3} &= 6a_{k+2} - 11a_{k+1} + 6a_k \\
&= 6(1 + 2^{k+1} + 3^{k+1}) - 11(1 + 2^k + 3^k) + 6(1 + 2^{k-1} + 3^{k-1}) \\
&= 6 - 11 + 6 + (6 \cdot 2^2 - 11 \cdot 2 + 6)2^{k-1} + (6 \cdot 3^2 - 11 \cdot 3 + 6)3^{k-1} \\
&= 1 + 8 \cdot 2^{k-1} + 27 \cdot 3^{k-1} = 1 + 2^3 \cdot 2^{k-1} + 3^3 \cdot 3^{k-1} \\
&= 1 + 2^{k+2} + 3^{k+2} = 1 + 2^{(k+3)-1} + 3^{(k+3)-1}
\end{aligned}$$

となるので $P(k+3)$ も成立している。数学的帰納法によりすべての自然数 n に対し $P(n)$ が成立する。