数学序論問題解説 #5

河野

演習問題 2.1

(1) 5 の倍数となるような自然数全体の集合を表せ。

(2) 4 で割ると余りが 3 となるような自然数全体の集合を表せ。

(3) 3 で割ると余りが 2 であり，5 で割ると余りが 3 となるような自然数全体の集合を表せ。

(1) 「$\{5k \mid k \in \mathbb{N}\}$」とのみ書いてある解答も間違いとはいえないが，ここは集合の記号に慣れることが目的なので，詳しく (しつこく) 解答しておく。自然数 n を p で割った余りが r というのは講義で説明したように

$$\exists q \in \mathbb{Z} \quad n = pq + r \qquad (0 \leqq r < n)$$

である。

$A = \{5k \mid k \in \mathbb{N}\}$，$B = \{x \mid x \text{ は } 5 \text{ で割り切れる}, x \in \mathbb{N}\}$ とおくとき $A = B$ であることを示す。

$$A = B \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \subseteq B \quad \wedge \quad B \subseteq A$$

なので $A \subseteq B$ かつ $B \subseteq A$ を示す。最初に $A \subseteq B$ を示す。

$$A \subseteq B \quad \Longleftrightarrow \quad \forall a \;\; a \in A \Longrightarrow a \in B$$

なので $a \in A$ となる任意の a をとる。このときある自然数 k が存在して $a = 5k$ と書ける。$5k$ は自然数 (自然数 $\times$ 自然数は自然数である) $a \in \mathbb{N}$ であるまた $a = 5k\,(k \in \mathbb{N})$ なので a は 5 で割り切れる。よって $a \in B$ となる。よって $A \subseteq B$ が成立する。

次に $B \subseteq A$ を示す。a を B の任意の元とする。a は 5 で割り切れる自然数なのである整数 k が存在して $a = 5k$ と書ける。ここで $k \leqq 0$ とすると $a = 5k \leqq 0$ となり自然数であることに矛盾，よって $k > 0$ である。k は整数なので $k \in \mathbb{N}$ となり，$a \in A$ となる。よって $B \subseteq A$ が成立する。

(2) $A = \{4k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ である。$A = \{4k + 3 \mid k \in \mathbb{N}\}$ は間違い。これでは 3 が A に含まれない。この表示では余りが直接は見にくいので $A = \{4(k-1) + 3 \mid k \in \mathbb{N}\}$ とも書ける。また $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ として $A = \{4k + 3 \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ という書き方もできる。

ここでは $A = \{4k + 3 \mid k \in \mathbb{N}_0\}$，$B = \{x \mid x \text{ は } 3 \text{ で割ると余りが } 3 \text{ である自然数}\}$ とおくとき $A = B$ を示す。

最初に $A \subseteq B$ を示す。a を A の任意の元とすると，ある $k \in \mathbb{N}_0$ が存在して $a = 4k + 3$ と書ける。よって a は 4 で割ると 3 余る整数である。また $k \geqq 0$ より $4k \geqq 0$，よって $4k + 3 \geqq 3 > 0$ となるので，a は自然数である。よって $a \in B$ となり，$A \subseteq B$ が成立する。

次に $B \subseteq A$ を示す。a を B の任意の元とすると，a は 4 で割ると余り 3 なので，ある整数 k が存在して，$a = 4k + 3$ となる。ここで $k < 0$ とすると $k \leqq -1$ なので $4k \leqq -4$ より $a = 4k + 3 \leqq -4 + 3 = -1 < 0$ となる。これは a が自然数であることに矛盾するので，$k \geqq 0$ であり，$k \in \mathbb{N}_0$ である。よって $a \in A$ となり，$B \subseteq A$ が示された。以上により $A = B$ が成立する。

(3) 3 で割ると余りが 2 である集合と 5 で割ると余りが 3 である集合の共通部分を少し調べてみると，15 で割ると 8 余る集合になっていることが予想される。

$A = \{15k + 8 \mid k \in \mathbb{N}_0\}$，$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ は } 3 \text{ で割ると余りが } 2, x \text{ は } 5 \text{ で割ると余りが } 3\}$ とするとき $A = B$ を示す。最初に $A \subseteq B$ を示す。a を A の任意の元とする。$a = 15k + 8\,(k \in \mathbb{N}_0)$

と書かれているので，$a=3(5k+2)+2$ となるので，a は 3 で割る余りは 2 である。また $a=5(3k+1)+3$ と書けるので 5 で割ると余り 3 である。また $k \geqq 0$ より $a=15k+8 \geqq 8>0$ なので a は自然数である。以上により $a \in B$ が示される。よって $A \subseteq B$ が成立する。

次に $B \subseteq A$ を示す。a を B の任意の元とする。3 で割ると余りが 2 なのである整数 k_1 が存在して $a=3k_1+2$ と書ける。5 で割ると余りが 3 なのである整数 k_2 が存在して $a=5k_2+3$ と書ける。$5k_2+3=3k_1+2$ なので $5k_2+1=3k_1$ となっている。k_2 を 3 で割った余りを r とすると，ある整数 k_3 が存在して $k_2=3k_3+r$ と書ける。$r=0$ または 1 または 2 である。このとき $5(3k_3+r)+1=15k_3+5r+1$ は 3 で割り切れる。$r=0$ のときこの数を 3 で割った余りが 1 になるので，$r \neq 0$ である。また $r=2$ のときこの数を 3 で割った余りは 2 になるので $r \neq 2$ である。$r=1$ のときは 3 で割り切れるので $r=1$ であることが分かる。よって $k_2=3k_3+1$ と書くことができる。

$$a=5k_2+3=5(3k_3+1)+3=15k_3+8$$

となる。$k_3<0$ のとき $k_3 \leqq -1$ なので

$$a=15k_3+8<-15+8=-7<0$$

となり a が自然数であることに矛盾，よって $k_3 \geqq 0$ である。よって $a \in A$ であり，$B \subseteq A$ が成立する。よって $A=B$ が示された。ここでの議論を眺めると，書き方という問題もあるが，$\mathbb{N}$ ではなくいっそ $\mathbb{N}_0$ を自然数と定義したほうが議論がすっきりすると思われる。これ以外にも種々の理由があり，$\mathbb{N}_0$ を**自然数**としている本もある。個人的にはその方がすっきりしてよいと考えてはいるが，この講義ではその立場は採用しない。

演習問題 2.2

(1) 例 2.2 の (2) を証明せよ。

(2) $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$ ではないことを定義に基づいて証明せよ。

(3) $\mathbb{N}=\mathbb{Z}$ ではないことを定義に基づいて証明せよ。

(1) n を $\{4k \mid k \in \mathbb{N}\}$ の任意の元とすると，ある自然数 k が存在して $n=4k$ と書ける。このとき $k_1=2k$ とおくと $n=4k=2 \cdot 2k=2k_1$ なので $n \in \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ となっている。よって $\{4k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ が成立している。

(2) $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$ の定義は $\mathbb{Z}$ の任意の元 a が $\mathbb{N}$ に含まれていることであった。即ち

$$\forall a \ \ a \in \mathbb{Z} \implies a \in \mathbb{N}$$

である。この命題の否定は

$$\exists a \ \ a \in \mathbb{Z} \wedge a \notin \mathbb{N}$$

である。a として -1 をとってくると $-1 \in \mathbb{Z}$ かつ $-1 \notin \mathbb{N}$ となっているので，否定命題が証明される。よってもとの $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$ は正しくないことが示された。

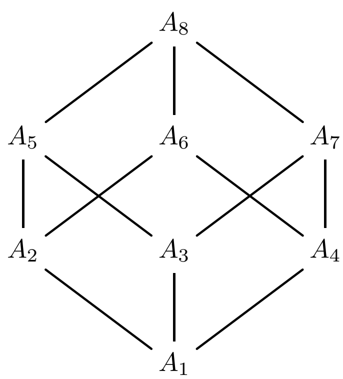
(3) $\mathbb{N}=\mathbb{Z}$ の定義は $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ および $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$ が共に成立することであった。(2) より $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$ が成立しないので，$\mathbb{N}=\mathbb{Z}$ は成立しない。

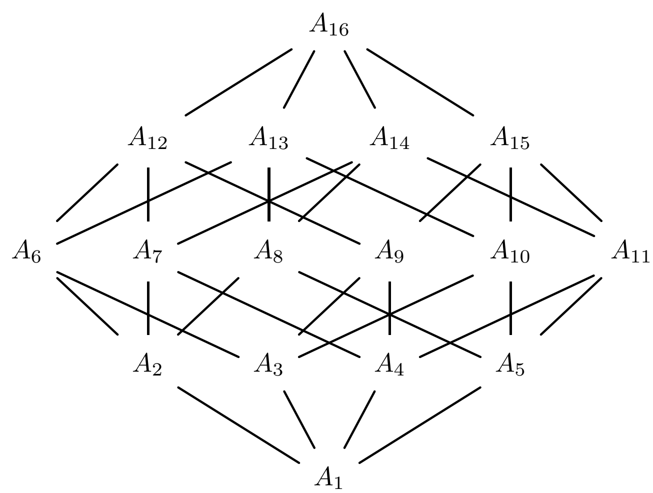
演習問題 2.3 　次の集合 A に対しその部分集合をすべて列挙せよ。またその部分集合の間に成立する包含関係 $(\subseteq, \not\subseteq)$ を調べよ。

(1) $A=\{1,2\}$ 　　(2) $A=\{1,2,3\}$ 　　(3) $A=\{1,2,3,4\}$

(1) 部分集合をすべて列挙すると $A_0 = \{\ \}$,$A_1 = \{1\}$,$A_2 = \{2\}$,$A_3 = \{1,2\}$ である。成立する包含関係はまず $A_0 \subseteq A_1$,$A_0 \subseteq A_2$,$A_0 \subseteq A_3$, $A_1 \subseteq A_3$,$A_2 \subseteq A_3$ である。これらに関しては $A_i \subsetneq A_j$ も成立している。これらに加え $A_i \subseteq A_i$ $(i = 0, \ldots, 3)$ がある。これに関しては $A_i \subsetneq A_i$ は成立しない。上で述べなかった集合同士は $A_i \not\subseteq A_j$ である。

(2) 部分集合をすべて列挙すると $A_1 = \{\ \}$,$A_2 = \{1\}$,$A_3 = \{2\}$,$A_4 = \{3\}$,$A_5 = \{1,2\}$, $A_6 = \{1,3\}$,$A_7 = \{2,3\}$,$A_8 = \{1,2,3\}$ である。成立する包含関係はまず $A_1 \subseteq A_2$,$A_1 \subseteq A_3$,$A_1 \subseteq A_4$,$A_1 \subseteq A_5$, $A_1 \subseteq A_6$,$A_1 \subseteq A_7$,$A_1 \subseteq A_8$, $A_2 \subseteq A_5$,$A_2 \subseteq A_6$,$A_2 \subseteq A_8$, $A_3 \subseteq A_5$,$A_3 \subseteq A_7$,$A_3 \subseteq A_8$, $A_4 \subseteq A_6$,$A_4 \subseteq A_7$,$A_4 \subseteq A_8$, $A_5 \subseteq A_8$,$A_6 \subseteq A_8$,$A_7 \subseteq A_8$ である。これらに関しては $A_i \subsetneq A_j$ も成立している。これらに加え $A_i \subseteq A_i$ $(i = 1, \ldots, 8)$ がある。これに関しては $A_i \subsetneq A_i$ は成立しない。上で述べなかった集合同士は $A_i \not\subseteq A_j$ である。これを下図左の様に表すと分かりやすいかもしれない。線は真部分集合の関係になることを表しており，線を下にたどっていけるもののみが真部分集合になっている。





(3) 部分集合をすべて列挙すると $A_1 = \{\ \}$,$A_2 = \{1\}$,$A_3 = \{2\}$,$A_4 = \{3\}$,$A_5 = \{4\}$, $A_6 = \{1,2\}$,$A_7 = \{1,3\}$,$A_8 = \{1,4\}$,$A_9 = \{2,3\}$, $A_{10} = \{2,4\}$,$A_{11} = \{3,4\}$,$A_{12} = \{1,2,3\}$, $A_{13} = \{1,2,4\}$,$A_{14} = \{1,3,4\}$,$A_{15} = \{2,3,4\}$, $A_{16} = \{1,2,3,4\}$ である。部分集合の関係は省略した。前問の様に図右をみれば分かるであろう。

演習問題 2.4 次の A，B,C に関し $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$, $B \cup C$, $A \cap C$, $A \cup C$,$(A \cap B) \cap C$,$(A \cup B) \cup C$ を求めよ。また $A \cap (B \cup C)$,$(A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C)$,$(A \cup B) \cap (A \cup C)$ を求めよ。

(1) $A = \{1,2,3,4\}$,$B = \{1,3,5,6\}$,$C = \{1,2,6,7\}$

(2) $A = \{1,2,3,4,5\}$,$B = \{1,2,3\}$,$C = \{5,6,7\}$

(3) $A = \{1,2,3,4\}$,$B = \{1,3,5\}$,$C = \{\ \}$

(1) $A \cap B = \{1,3\}$, $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B \cap C = \{1,6\}$, $B \cup C = \{1,2,3,5,6,7\}$, $A \cap C = \{1,2\}$, $A \cup C = \{1,2,3,4,6,7\}$, $(A \cap B) \cap C = \{1\}$, $(A \cup B) \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

$A \cap (B \cup C) = \{1,2,3,4\} \cap \{1,2,3,5,6,7\} = \{1,2,3\}$, $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1,3\} \cup \{1,2\} = \{1,2,3\}$, $A \cup (B \cap C) = \{1,2,3,4\} \cup \{1,6\} = \{1,2,3,4,6\}$, $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1,2,3,4,5,6\} \cap \{1,2,3,4,6,7\} = \{1,2,3,4,6\}$

(2) $A \cap B = \{1,2,3\}$, $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$, $B \cap C = \{\ \}$, $B \cup C = \{1,2,3,5,6,7\}$, $A \cap C = \{5\}$, $A \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $(A \cap B) \cap C = \{\ \}$, $(A \cup B) \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

$A \cap (B \cup C) = \{1,2,3,4,5\} \cap \{1,2,3,5,6,7\} = \{1,2,3,5\}$, $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1,2,3\} \cup \{5\} = \{1,2,3,5\}$, $A \cup (B \cap C) = \{1,2,3,4,5\} \cup \{\ \} = \{1,2,3,4,5\}$, $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1,2,3,4,5\} \cap \{1,2,3,4,5,6,7\} = \{1,2,3,4,5\}$

(3) $A \cap B = \{1,3\}$, $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$, $B \cap C = \{\ \}$, $B \cup C = \{1,3,5\}$, $A \cap C = \{\ \}$, $A \cup C = \{1,2,3,4\}$, $(A \cap B) \cap C = \{\ \}$, $(A \cup B) \cup C = \{1,2,3,4,5\}$

$A \cap (B \cup C) = \{1,2,3,4\} \cap \{1,3,5\} = \{1,3\}$, $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1,3\} \cup \{\ \} = \{1,3\}$, $A \cup (B \cap C) = \{1,2,3,4\} \cup \{\ \} = \{1,2,3,4\}$, $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1,2,3,4,5\} \cap \{1,2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$

演習問題 2.5　A, B, C を集合とする。

(1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

を証明せよ。

[ヒント：] これらは，２つの集合が等しい，ということを示す問題である。２つの集合 A, B が $A = B$ である，ということの定義は,「 $A \subseteq B$ かつ $B \subseteq A$ 」 ということだったので，$A = B$ を示せ，ということは,「 $A \subseteq B$ かつ $B \subseteq A$ 」 を示せ，ということである。

$A \subseteq B$ の定義は,「 A の全ての元が B に含まれる 」 ということだったので，上の問題 (1) について言うならば，$x \in A \cap (B \cup C)$ ならば $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ であることを示し，$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ならば $x \in A \cap (B \cup C)$ であることを示せば良い，ということになる。

(1) 最初に $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ を示す。x を $A \cap (B \cup C)$ の任意の元とする。このとき

$$x \in A \quad \wedge \quad x \in B \cup C$$

が成立している。これは

$$x \in A \quad \wedge \quad (x \in B \vee x \in C)$$

と同値である。論理のところで学んだように命題 P, Q, R に対し $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ が成立する。よって上の命題は

$$(x \in A \wedge x \in B) \quad \vee \quad (x \in A \wedge x \in C)$$

と同値である。$x \in A \wedge x \in B$ は $x \in A \cap B$ と同値であり，$x \in A \wedge x \in C$ は $x \in A \cap C$ と同値なので

$$x \in A \cap B \vee x \in A \cap C$$

と同値である。よって

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

が成立することが分かり，$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ が成立する。

逆に $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ならば $x \in A \cap (B \cup C)$ であることを示す。x を $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ の任意の元とする。このとき

$$x \in A \cap B \quad \vee \quad x \in A \cap C$$

が成立している。上と同様に同値な命題で変形していくと順に

$$(x \in A \wedge x \in B) \quad \vee \quad (x \in A \wedge x \in C)$$

$$x \in A \quad \wedge \quad (x \in B \vee x \in C)$$

$$x \in A \quad \wedge \quad x \in B \cup C$$

となるので $x \in A \cap (B \cup C)$ が成立する。以上により $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ の成立が示される。

(2) (1) と同様に示すことができるが，ここでは少し違う証明の仕方を紹介しておく。ただし次の結果は使用する；$A \subseteq B$ かつ $C \subseteq D \implies A \cap C \subseteq B \cap D$ 及び $A \cup C \subseteq B \cup D$ が成立する。最初に

$$\forall x \;\; x \in A \cup (B \cap C) \implies x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

であることを示す。x を $A \cup (B \cap C)$ の任意の元とする。このとき

$$x \in A \;\vee\; x \in B \cap C$$

が成立している。$A \subseteq A \cup B$ かつ $A \subseteq A \cup C$ なので $A \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ が成立している。$x \in A$ が成立するときは

$$x \in A \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

より $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ が成立する。

　$B \subseteq A \cup B$ かつ $C \subseteq A \cup C$ より $B \cap C \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ が成立している。$x \in B \cap C$ が成立するときは

$$x \in B \cap C \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

より $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ が成立する。いずれの場合も成立するので，成立が示された。

　次に $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ならば $x \in A \cup (B \cap C)$ であることを示す。x を $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ の任意の元とする。このとき

$$x \in A \cup B \text{ かつ } x \in A \cup C$$

が成立している。(a) $x \in A$ の場合と (b) $a \notin A$ の場合に分ける。

　(a) の場合は $A \subseteq A \cup (B \cap C)$ より $x \in A \cup (B \cap C)$ が成立する。

　(b) の場合 $x \in A \cup B$ かつ $x \notin A$ なので $x \in B$ が成立している。また $x \in A \cup C$ かつ $x \notin A$ なので $x \in C$ が成立している。よって $x \in B \cap C$ である。$B \cap C \subseteq A \cup (B \cap C)$ なので $x \in A \cup (B \cap C)$ が成立する。

　いずれの場合も成立しているので，成立が示された。

演習問題 2.6　演習問題 2.4 の集合 A, B に対し $A - B$, A^c, $A \times B$ を求めよ。ただしここで全体集合は $X = \{1, 2, \ldots, 7\}$ とする。

(1) $A = \{1, 2, 3, 4\}$，$B = \{1, 3, 5, 6\}$ なので，$A - B = \{2, 4\}$，$A^c = \{5, 6, 7\}$，$A \times B = \{(1,1), (1,3), (1,5), (1,6), (2,1), (2,3), (2,5), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5), (3,6), (4,1), (4,3), (4,5), (4,6)\}$

(2) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B = \{1, 2, 3\}$ なので，$A - B = \{4, 5\}$，$A^c = \{6, 7\}$，$A \times B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3)\}$

(3) $A = \{1,2,3,4\}$，$B = \{1,3,5\}$ なので，$A - B = \{2,4\}$，$A^c = \{5,6,7\}$，$A \times B = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,1),(2,3),(2,5),(3,1),(3,3),(3,5),(4,1),(4,3),(4,5)\}$

演習問題 2.7　X を全体集合とし A と B をその部分集合とするとき，次を証明せよ。
(1) $B \subseteq A \iff B^c \supseteq A^c$
(2) De Morgan の法則

$$\begin{aligned}(A \cup B)^c &= A^c \cap B^c \\ (A \cap B)^c &= A^c \cup B^c\end{aligned}$$

(1)　$A^c = \{x \in X \mid x \notin A\}$，$B^c = \{x \in X \mid x \notin B\}$ である。$B \subseteq A$ が成立しているとすると，

$$\forall x \;\; x \in B \Longrightarrow x \in A$$

が成立している。条件の部分の対偶は $x \notin A \Longrightarrow x \notin B$ なので上の命題は

$$\forall x \;\; x \notin A \Longrightarrow x \notin B$$

と同値である。これは $A^c \subseteq B^c$ を意味している。
　$B^c \supseteq A^c$ が成立しているとすると，

$$\forall x \;\; x \notin A \Longrightarrow x \notin B$$

が成立している。条件の部分の対偶をとると

$$\forall x \;\; x \in B \Longrightarrow x \in A$$

となる。よって $B \subseteq A$ が成立する。
(2)　最初に $(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$ を示す。そのためには $(A\cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$ および $(A \cup B)^x \supseteq A^c \cap B^c$ を示せばよい。
　x を $(A \cup B)^c$ の任意の元とすると

$$x \notin A \cup B$$

が成立している。$x \in A$ とすると $x \in A \cup B$ となるので $x \notin A$ である。よって $x \in A^c$ が成立する。また $x \in B$ とすると $x \in A \cup B$ となるので $x \notin B$ である。よって $x \in B^c$ が成立する。よって $x \in A^c \cap B^c$ となる。以上で $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$ が示された。
　x を $A^c \cap B^c$ の任意の元とすると

$$x \notin A \;\wedge\; x \notin B$$

が成立している。$x \in A \cup B$ とすると $x \in A$ または $x \in B$ が成立するが，上より共に成立しない。よって $x \notin A \cup B$ なので $x \in (A \cup B)^c$ となる。以上で $(A \cup B)^c \supseteq A^c \cap B^c$ が示された。$(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$ 及び $(A \cup B)^c \supseteq A^c \cap B^c$ が成立するので $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ が成立する。

　次に $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ を示す。上で述べた様な証明もできるが，ここでは上の結果を用いる証明をすることにする。A，B に対し $C = A^c$，$D = B^c$ とおき，C，D に対し 上の結果を適用する。

$$(C \cup D)^c = C^c \cap D^c$$

が成立している。この両者の補集合をとると $((C \cup D)^c)^c = C \cup D$ であることに注意すると

$$(C \cup D) = (C^c \cap D^c)^c$$

となる。$C^c = (A^c)^c = A$，$D^c = (B^c)^c = B$ を用いると

$$A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$$

となる。これが求めるべきものであった。