

演習問題 3.5 次の複素数の極形式を求めよ。

(1) $1 + i\sqrt{3}$ (2) -2 (3) i (4) $2\sqrt{3} - 2i$ (5) $1 - \sqrt{3}i$

(1) $|1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$ なので

$$1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

と書ける。 $2 \exp\left(i \frac{\pi}{3}\right)$ と表してもよい。ここで $\exp(x) = e^x$ という記法を用いた。

(2) $|-2| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$ なので

$$-2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = 2e^{i\pi}$$

となる。

(3) $|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$ なので

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = \exp\left(i \frac{\pi}{2}\right)$$

となる。

(4) $|2\sqrt{3} - 2i| = \sqrt{12 + 4} = 4$ なので

$$2\sqrt{3} - 2i = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 4 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right) = 4 \exp\left(-i \frac{\pi}{6}\right)$$

となる。偏角をマイナスで選んだが $\frac{11\pi}{6}$ としてもよい。

(5) $|1 - \sqrt{3}i| = 2$ なので

$$1 - \sqrt{3}i = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) = 2 \exp\left(-i \frac{\pi}{3}\right)$$

となる。偏角をマイナスで選んだが $\frac{5\pi}{3}$ としてもよい。

演習問題 3.6 次の問いに答えよ。

(1) $e^{i\theta}$ は、原点を中心とする半径 1 の円上の点であることを示せ。

(2) オイラーの公式を用いて次の等式を導け。

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

(1) $|e^{i\theta}| = |\cos \theta + i \sin \theta| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \sqrt{1} = 1$ なので原点を中心とする半径 1 の円周上にある。

(2) $\cos(-\theta) = \cos \theta$, $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ より

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta$$

となるので,

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta, \quad e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta$$

となる。これから (2) の式を得る。

演習問題 3.7 次の問いに答えよ。

(1) $(e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}$ を示せ。

(2) 系 3.6 を証明せよ。

(1)

$$(e^{i\theta})^{-1} = \frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta}e^{-i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta-i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{e^0} = e^{-i\theta}$$

(2) n に関する数学的帰納法で証明する。 $n = 1$ のとき示すべき式は $(e^{i\theta})^1 = e^{i1\theta}$ なので成立している。 $n = k$ のとき成立を仮定する; 即ち $(e^{i\theta})^k = e^{ik\theta}$ が成立していると仮定する。

$$(e^{i\theta})^{k+1} = (e^{i\theta})^k e^{i\theta} = e^{ik\theta} e^{i\theta} = e^{ik\theta+i\theta} = e^{i(k+1)\theta}$$

となり $n = k + 1$ の成立が示された。よってすべての自然数に対し成立している。

演習問題 3.8 次の点を極形式で表し図示せよ。

(1) $\alpha = 2 + 2i$ (2) $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ (3) $\alpha\beta$ (4) $\frac{\beta}{\alpha}$

(1) $|\alpha| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ なので

$$\alpha = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2} \exp \left(i \frac{\pi}{4} \right)$$

である。

(2) $|\beta| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$ なので

$$\beta = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \exp \left(i \frac{\pi}{6} \right)$$

である。

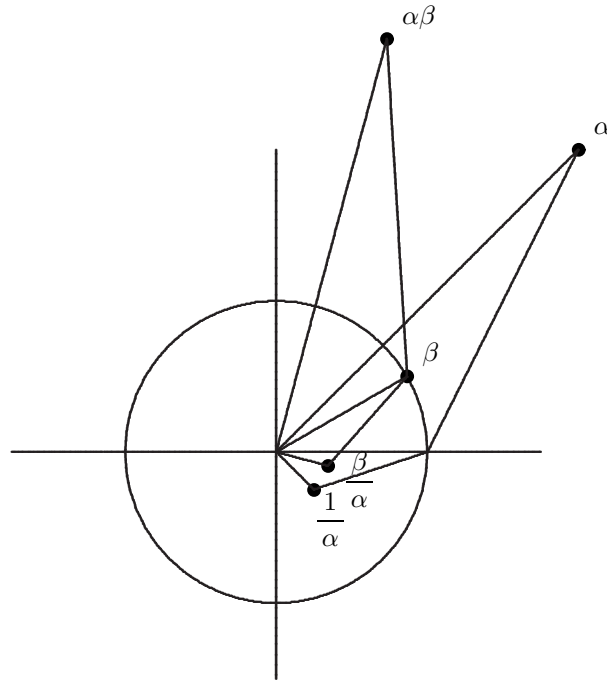
(3)

$$\alpha\beta = 2\sqrt{2} \exp \left(i \frac{\pi}{4} \right) \exp \left(i \frac{\pi}{6} \right) = 2\sqrt{2} \exp \left(i \frac{\pi}{4} + i \frac{\pi}{6} \right) = 2\sqrt{2} \exp \left(i \frac{5\pi}{12} \right)$$

(4)

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\alpha} &= \frac{\exp \left(i \frac{\pi}{6} \right)}{2\sqrt{2} \exp \left(i \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \exp \left(i \frac{\pi}{6} \right) \exp \left(-i \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \exp \left(i \frac{\pi}{6} - i \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \exp \left(-i \frac{\pi}{12} \right) \end{aligned}$$

よって図示すると次図のようになっている。



演習問題 3.9

- (1) 1 の 4 乗根を具体的に求め、複素平面に図示せよ。
- (2) 1 の 3 乗根を具体的に求め、複素平面に図示せよ。
- (3) 1 の 6 乗根を具体的に求め、複素平面に図示せよ。
- (4) 1 の 5 乗根を求め、複素平面に図示せよ。

- (1) 1 の 4 乗根は $x^4 - 1 = 0$ の解なので

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$$

の解である。よって解は $x = 1, -1, i, -i$ となる。図示すると次図のようになる。

- (2) 1 の 3 乗根は $x^3 = 1$ の解なので

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

より $x = 1$ または $x^2 + x + 1 = 0$ を満たす。 $x^2 + x + 1 = 0$ のとき

$$x = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

なので $1, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ が求めるものである。 $\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ とおくと $\omega^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ になるので図のようになる。

- (3) 1 の 6 乗根は $x^6 = 1$ の解なので

$$x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

より $x = 1$ または $x = -1$ または $x^2 + x + 1 = 0$ または $x^2 - x + 1 = 0$ を満たす。 $x^2 + x + 1 = 0$ のとき

$$x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

であり、 $x^2 - x + 1 = 0$ のとき

$$x = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

なので $1, -1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ が求めるものである。 $\lambda = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ とおくと、 $\lambda^2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \omega$, $\lambda^3 = -1$, $\lambda^4 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \omega^2$, $\lambda^5 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, なので図の様になる。

(4) 1 の 5 乗根は $x^5 = 1$ の解なので

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$$

より $x = 1$ または $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ を満たす。 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ のとき両辺を x^2 で割ると $x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$ となる。 $t = x + \frac{1}{x}$ とおくと $t^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$ なので t は 2 次方程式

$$t^2 + t - 1 = 0$$

の解である。これを解くと $t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ が得られる。 $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ のとき

$$x + \frac{1}{x} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

を解くと

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} + i \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \quad x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} - i \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

が得られる。 $t = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ のとき

$$x + \frac{1}{x} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

を解くと

$$x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} + i \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}, \quad x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} - i \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

が得られる。よって

$$1, \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} + i \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} - i \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} + i \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} - i \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

が求める解である。

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} + i \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \text{ とおくと}$$

$$\alpha^2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} + i \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\alpha^3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} - i \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\alpha^4 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} - i \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

なので図の様になる。

