

演習問題 4.7

- (1) a, b, c を正の実数とする。 $a^b = c^{b \log_c a}$ を示せ。
 (2) a, b, c を正の実数とする。 $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ を示せ。

対数関数においては次が基本的である。

$$y = \log_a x \iff x = a^y$$

- (1) $X = c^{b \log_c a}$ とおくと

$$\log_c X = \log_c c^{b \log_c a} = b \log_c a \log_c c = b \log_c a = \log_c a^b$$

が成立する。 \log は単射なので $\log_c X = \log_c Y$ なら $X = Y$ が成立している。よって $X = a^b$ が成立する。

- (2) $X = a^{\log_c b}$ とおくと $\log_c X = \log_c a^{\log_c b} = \log_c b \log_c a$ である。 $Y = b^{\log_c a}$ とおくと $\log_c Y = \log_c b^{\log_c a} = \log_c a \log_c b$ である。よって $\log_c X = \log_c Y$ が成立するが、 \log は単射なので $X = Y$ が成立する。

演習問題 4.8

- (1) 次の値を求めよ。

$$\arcsin \frac{1}{2}, \quad \arccos \frac{1}{2}, \quad \arctan 1, \quad \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \arctan \sqrt{3}, \quad \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$$

- (2) $-1 \leq x \leq 1$ の時、 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ を示せ。
 (3) $x > 0$ の時、 $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ を示せ。
 (4) $\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ を示せ。

逆三角関数においては次が基本的である。

$$y = \arcsin x \iff x = \sin y \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y = \arccos x \iff x = \cos y \quad (0 \leq y \leq \pi)$$

$$y = \arctan x \iff x = \tan y \quad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$$

- (1) $x = \arcsin \frac{1}{2}$ とおくと

$$\frac{1}{2} = \sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

なので $x = \frac{\pi}{6}$, 即ち $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ となる。

$x = \arccos \frac{1}{2}$ とおくと

$$\frac{1}{2} = \cos x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

なので $x = \frac{\pi}{3}$, 即ち $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ となる。

$x = \arctan 1$ とおくと

$$1 = \tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

なので $x = \frac{\pi}{4}$, 即ち $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ となる。

$x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}$ とおくと

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

なので $x = \frac{\pi}{4}$, 即ち $\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$ となる。

$x = \arctan \sqrt{3}$ とおくと

$$\sqrt{3} = \tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

なので $x = \frac{\pi}{3}$, 即ち $\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ となる。

$x = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$ とおくと

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

なので $x = \frac{\pi}{6}$, 即ち $\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ となる。

(2) $u = \arcsin x$ とおくと $x = \sin u$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}\right)$ であり, $v = \arccos x$ とおくと $x = \cos v$ $(0 \leq v \leq \pi)$ である。演習問題 5.3 (1) を用いると

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \sin\left(-\left(v - \frac{\pi}{2}\right)\right) = -\sin\left(v - \frac{\pi}{2}\right) = -(-\cos v) = \cos v$$

の成立が示される。 $0 \leq v \leq \pi$ のとき $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - v \leq \frac{\pi}{2}$ であり,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \cos v = x = \sin u$$

なので $\frac{\pi}{2} - v = u$ となり, $u + v = \frac{\pi}{2}$ となる。

(3) $u = \arctan x$ とおくと $x = \tan u$ $\left(-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}\right)$ である。 $x > 0$ より $0 < u < \frac{\pi}{2}$ となっている。 $v = \arctan \frac{1}{x}$ とおくと $\frac{1}{x} = \tan v$ $\left(-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}\right)$ である。 $\frac{1}{x} > 0$ より $0 < v < \frac{\pi}{2}$ となっている。演習問題 5.3 (1) を用いると

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \cos\left(-\left(v - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(v - \frac{\pi}{2}\right) = \sin v$$

の成立が示される。これより

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)} = \frac{\cos v}{\sin v} = \frac{1}{\tan v} = x = \tan u$$

が成立する。 u, v ともに $0 < u < \frac{\pi}{2}$, $0 < v < \frac{\pi}{2}$ なので $0 < \frac{\pi}{2} - v < \frac{\pi}{2}$ となり, $\frac{\pi}{2} - v = u$ が成立する。

(4) $u = \arctan x$ とおくと $x = \tan u$ ($-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$) であり, $v = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ とおくと $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \sin v$ ($-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$) となる。

$$1 + x^2 = 1 + \tan^2 u = 1 + \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u} = \frac{\cos^2 u}{\cos^2 u} + \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u} = \frac{1}{\cos^2 u}$$

であるが, $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ より $\cos u > 0$ なので $\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos u}$ となる。

$$\sin v = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \cos u \tan u = \sin u$$

であり, $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ より $u = v$ となる。

演習問題 4.9 次を示せ。

(1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(2) $\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$

(3) $\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b$

(1) $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ なので

$$\begin{aligned} \cosh^2 x &= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} \\ \sinh^2 x &= \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \end{aligned}$$

なので

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{4}{4} = 1$$

が成立する。

(2)

$$\begin{aligned} \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b &= \frac{e^a + e^{-a}}{2} \frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^a - e^{-a}}{2} \frac{e^b - e^{-b}}{2} \\ &= \frac{e^{a+b} + e^{-a+b} + e^{a-b} + e^{-a-b}}{4} + \frac{e^{a+b} - e^{-a+b} - e^{a-b} + e^{-a-b}}{4} \\ &= \frac{e^{a+b} + e^{-(a+b)}}{2} = \cosh(a+b) \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b &= \frac{e^a - e^{-a}}{2} \frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^a + e^{-a}}{2} \frac{e^b - e^{-b}}{2} \\ &= \frac{e^{a+b} - e^{-a+b} + e^{a-b} - e^{-a-b}}{4} + \frac{e^{a+b} + e^{-a+b} - e^{a-b} - e^{-a-b}}{4} \\ &= \frac{e^{(a+b)} - e^{-(a+b)}}{2} = \sinh(a+b)\end{aligned}$$

演習問題 4.10

(1) $\cosh x$ を $[0, \infty)$ に制限した関数の逆関数を $\cosh^{-1} x$ とする。これは $[1, \infty)$ から $[0, \infty)$ への関数である。

$$\cosh^{-1} x = \log \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$$

であることを示せ。

(2) $\sinh x$ の逆関数を $\sinh^{-1} x$ とする。これは \mathbb{R} 全体で定義された関数である。

$$\sinh^{-1} x = \log \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

であることを示せ。

(3) $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ とする。任意の x に対して $|\tanh x| < 1$ を示せ。

(4) $\tanh x$ は単調増加関数であることを (微分を使わずに) 示せ。

(1) $y = \cosh^{-1} x$ とおくと $x = \cosh y$ ($y \geq 0$) である。このとき $x \geq 1$ が成立している。 $Y = e^y$ とおくと $Y \geq 1$ となっている。

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{Y + \frac{1}{Y}}{2}$$

より

$$Y^2 - 2xY + 1 = 0$$

が成立している。2次方程式の解の公式より

$$Y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

となる。 $Y = x - \sqrt{x^2 - 1}$ が成立しているとすると、 $Y \geq 1$ より $x - \sqrt{x^2 - 1} \geq 1$ となり、

$$x - 1 \geq \sqrt{x^2 - 1}$$

が成立している。両辺を2乗すると $1 \geq x$ を得るが $x \geq 1$ より $x = 1$ となる。このときは $x + \sqrt{x^2 - 1} = x - \sqrt{x^2 - 1}$ となるので、 $Y = x + \sqrt{x^2 - 1}$ のときのみ考えればよい。以上の考察により

$$y = \log Y = \log \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$$

となる。

(2) $y = \sinh^{-1} x$ とおくと $x = \sinh y$ である。 $Y = e^y$ とおくと $Y > 0$ である。

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{Y - \frac{1}{Y}}{2}$$

より

$$Y^2 - 2xY - 1 = 0$$

が成立している。2次方程式の解の公式より

$$Y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

となる。 $Y = x - \sqrt{x^2 + 1}$ が成立しているとする、 $Y \leq 0$ より矛盾、よって $Y = x + \sqrt{x^2 + 1}$ となる。

$$y = \log Y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

となる。

(3) $X = e^x$ とおくと $X > 0$ である。

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{X - \frac{1}{X}}{X + \frac{1}{X}} = \frac{X^2 - 1}{X^2 + 1} = \frac{X^2 + 1 - 2}{X^2 + 1} = 1 - \frac{2}{X^2 + 1}$$

となる。 $X^2 > 0$ より $X^2 + 1 > 1$ であり、

$$0 < \frac{1}{X^2 + 1} < 1$$

となる。

$$0 > -\frac{2}{X^2 + 1} > -2$$

の両辺に 1 を加えると $1 > 1 - \frac{2}{X^2 + 1} > -1$ となる。

(4) 最初に $y = f(X) = \frac{2}{X^2 + 1}$ は $X > 0$ で単調減少であることを注意しておく。即ち $0 < X_1 < X_2$ ならば $f(X_1) > f(X_2)$ が成立している。 x_1, x_2 を $x_1 < x_2$ を満たす任意の実数とする。このとき $X_1 = e^{x_1}$, $X_2 = e^{x_2}$ とおくと $y = e^x$ は単調増加なので $X_1 < X_2$ が成立している。よって $f(X_1) > f(X_2)$ となり、 $-f(X_1) < -f(X_2)$ となる。これに 1 を加えると

$$1 - \frac{2}{X_1^2 + 1} < 1 - \frac{2}{X_2^2 + 1}$$

となり $\tanh x_1 < \tanh x_2$ となる。よって $\tanh x$ は単調増加である。