

演習問題 5.19

- (1)  $f(x) = x^2 + x + 1$  とする。(1, 3) における  $f$  のグラフの接線と法線の方程式を求めよ。  
 (2)  $f(x) = x(x-1)(x-2)$  のグラフに接し,  $y = 2x + 1$  と平行な直線の方程式を求めよ。  
 (3) 放物線  $y = ax^2 + bx + c$  上に相異なる2点  $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$  をとったとする。この放物線の接線で, 線分  $PQ$  に平行となるのは, どの点における接線か? その点の  $x$  座標の値を求めよ。

- (1)  $x = a$  における接線の方程式は

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

である。 $f'(x) = 2x + 1$  なので  $f'(1) = 3$  である。また  $f(1) = 3$  なので接線の方程式は

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 3(x - 1) + 3 = 3x$$

である。また法線は接線と直交するので法線の傾きは  $-\frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{3}$  である。よって法線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{f'(1)}(x - 1) + f(1) \\ &= -\frac{1}{3}(x - 1) + 3 \\ &= -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3} \end{aligned}$$

である。

- (2)  $x = a$  における接線の方程式は

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

である。この接線が  $y = 2x + 1$  と平行のとき  $f'(a) = 2$  が成立している。 $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$  なので  $f'(a) = 3a^2 - 6a + 2 = 2$  となる。これを解いて  $a = 0, 2$  を得る。 $f(0) = 0, f(2) = 0$  なので  $a = 0$  のとき接線の方程式は

$$y = 2x$$

$a = 2$  のときの接線の方程式は

$$y = 2x - 4$$

となる。

- (3) 線分  $PQ$  の傾きは

$$\begin{aligned} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} &= \frac{ax_2^2 + bx_2 + c - (ax_1^2 + bx_1 + c)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + b(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= a(x_2 + x_1) + b \end{aligned}$$

となる。また

$$f'(x) = 2ax + b$$

なので接線が線分  $PQ$  と平行となるような点の  $x$  座標は  $x = \frac{x_2 + x_1}{2}$  である。接点の座標は

$$\left( \frac{x_1 + x_2}{2}, a \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 + b \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right) + c \right)$$

である。

**演習問題 5.20** 極大点, 極小点は臨界点であることを証明せよ。

$c$  が関数  $y = f(x)$  の極大点とする。ある正数  $\delta$  が存在して  $0 < |x - c| < \delta$  を満たす任意の  $x$  に対し  $f(x) < f(c)$  が成立する。 $c$  に十分近い  $x$  に対しては  $f(x) - f(c) < 0$  が成立している。絶対値の十分小さい  $h > 0$  に対しては

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} < 0$$

が成立しているので

$$f'_+(c) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

が成立する。絶対値の十分小さい  $h < 0$  に対しては

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} > 0$$

が成立しているので

$$f'_-(c) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

が成立する。 $f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$  が存在する必要十分条件は  $f'_+(c) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$

および  $f'_-(c) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$  が存在して、 $f'_+(c) = f'_-(c)$  が成立することである。よって

$$0 \leq f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

より

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = 0$$

となる。よって  $c$  は臨界点である。極小値の場合も同様に証明することができる。

**演習問題 5.21** 以下の関数のグラフの概形を描け。

(1)  $f(x) = 2x^2 - x^4$

(2)  $f(x) = xe^{-x}$

(3)  $f(x) = x^2 \log x$

(4)  $f(x) = 3 \sin x + \sin 3x$

(5)  $f(x) = x - \sqrt{1+x}$

(6)  $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$

(7)  $f(x) = x + 2 \cos x$

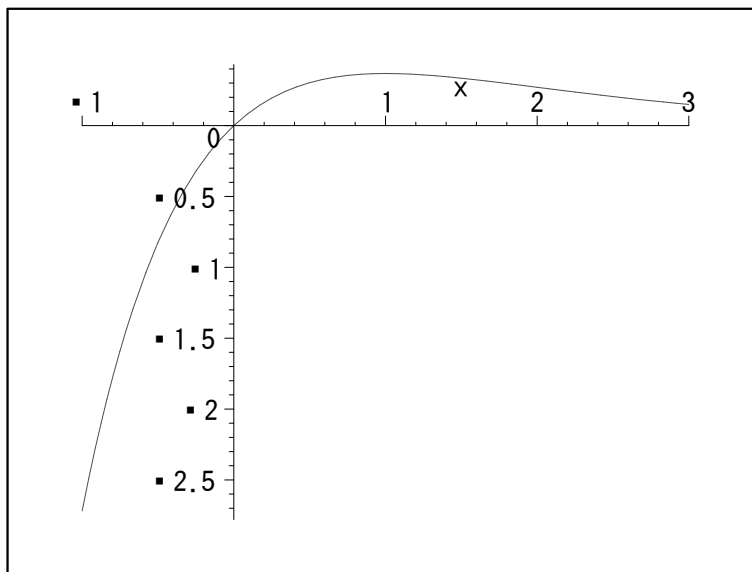
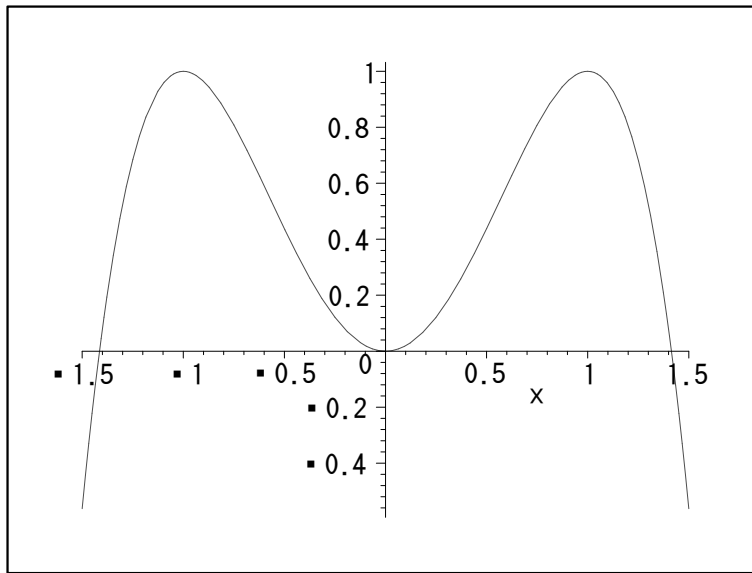
(8)  $f(x) = \sin x(1 + \cos x)$

(9)  $f(x) = x^{-x^2}$

(1)  $f'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1 - x^2) = 4x(1 - x)(1 + x)$  なので  $f'(x) = 0$  となるのは  $x = -1, 0, 1$  である。増減表は次のようになる。

$x$		-1		0		1	
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	↗	1	↘	0	↗	1	↘

$f(x) = 2x^2 - x^4 = 0$  を解くと  $x = 0, \pm\sqrt{2}$  となる。よって曲線は  $x$  軸と 3 点で交わっている。  
( $x = 0$  は重解なので接している。) このことに注意して概形を描くと次図のようになる。変換に問題があって以下のグラフの中のマイナス (-) が黒点に変わっています。注意を。



(2)  $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)e^{-x}$  なので  $f'(x) = 0$  となるのは  $x = 1$  のときのみである。増

減表は次のようになる。

$x$		1	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	$e^{-1}$	↘

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  および  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  ということに注意してグラフを描くと前図のようになる。

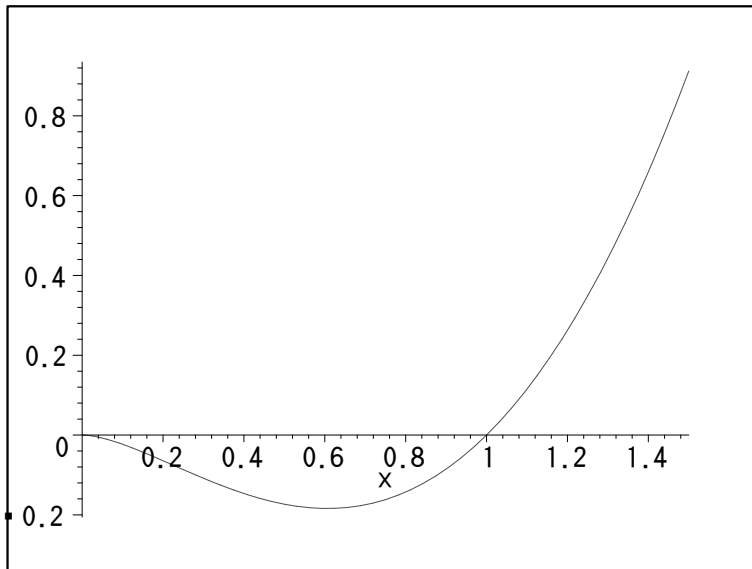
(3)  $\log x$  が定義されるのは  $x > 0$  なので  $f(x)$  の定義域も  $x > 0$  である。 $f'(x) = 2x \log x + x^2 \frac{1}{x} = x(2 \log x + 1) = 0$  を解いて、 $x = \sqrt{\frac{1}{e}}$  を得る。よって増減表は次の様になる。

$x$		$\sqrt{\frac{1}{e}}$	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{2e}$	↗

$x \rightarrow +0$  としたときの関数の挙動を調べる。ここでは後で学ぶロピタルの定理を用いる。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} x^2 \log x &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +0} x^2 = 0 \end{aligned}$$

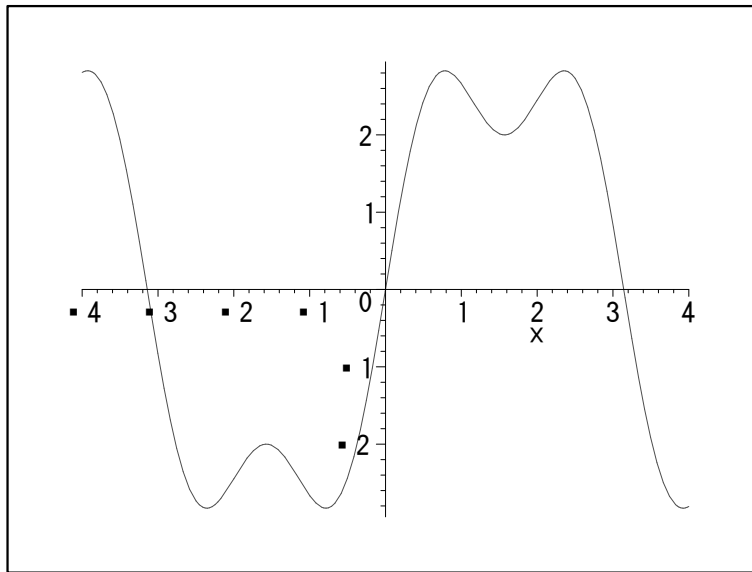
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  であり、また  $f(x) = 0$  となるのは  $x = 1$  のときのみである。このことに注意してグラフを描くと次図の様になる。



(4)  $\sin x$  は周期  $2\pi$  の周期関数であり,  $\sin 3x$  は周期  $\frac{2\pi}{3}$  の周期関数である。よって  $-\pi \leq x \leq \pi$  の範囲でグラフを描き, それを  $x$  軸の方向へ  $2n\pi$  ( $n$  は整数) 平行移動したグラフが求めるグラフとなる。よって  $-\pi \leq x \leq \pi$  の範囲で調べる。

$f(x) = 3 \cos x + 3 \cos 3x = 3 \cos x + 3(4 \cos^3 x - 3 \cos x) = 6 \cos x(2 \cos^2 x - 1) = 0$  となるのは  $\cos x = 0$  または  $\cos^2 x = \frac{1}{2}$  なので,  $-\pi \leq x \leq \pi$  の範囲では  $x = -\frac{3}{4}\pi, -\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi$  である。よって増減表は次のようになる。

$x$		$\frac{3}{4}\pi$		$-\frac{1}{2}\pi$		$-\frac{1}{4}\pi$		$\frac{1}{4}\pi$		$\frac{1}{2}\pi$		$\frac{3}{4}\pi$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{4}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\frac{4}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$\frac{4}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{4}{\sqrt{2}}$	$\searrow$



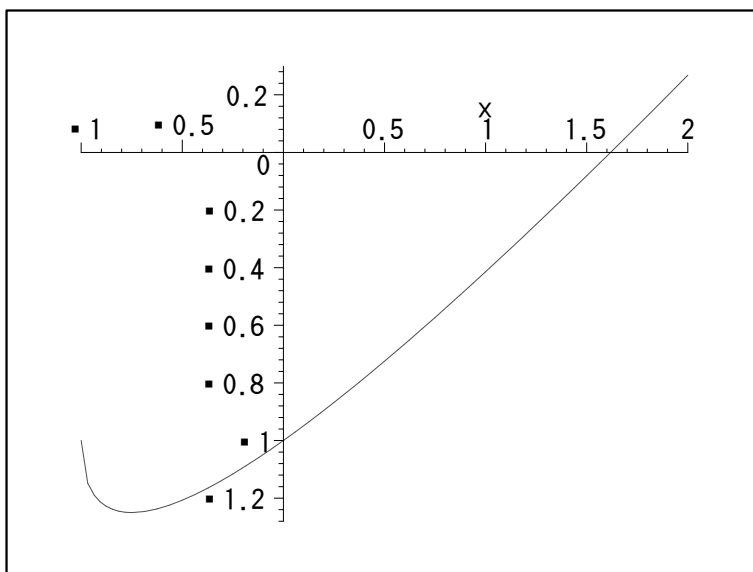
(5)  $f(x) = x - \sqrt{1+x}$  は  $1+x \geq 0$  で定義されている。  $f'(x) = 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+x}}$  なので  $f'(x) = 0$  より  $x = -\frac{3}{4}$  となる。

$x$		$-\frac{3}{4}$	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

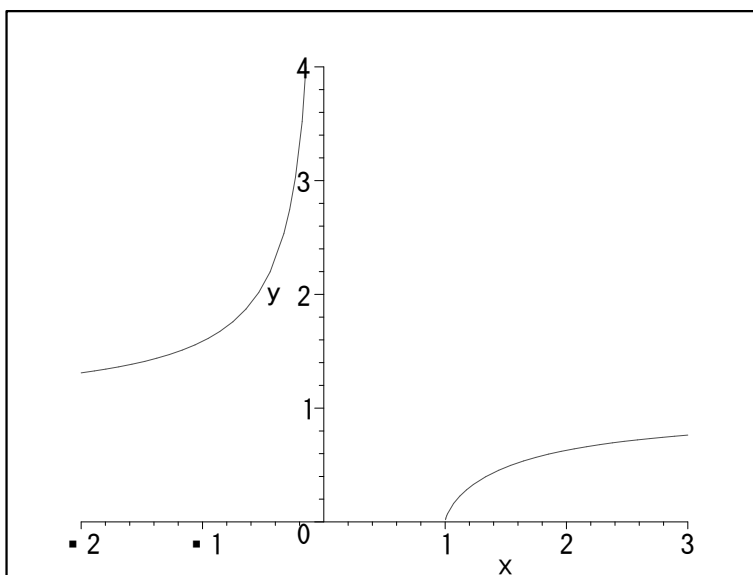
$f(x) = 0$  とすると  $x - \sqrt{1+x} = 0$  より  $x = \sqrt{1+x}$  となる。両辺を 2 乗して

$$x^2 = 1+x$$

を得る。この 2 次方程式の解は  $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$  である。しかし  $x = \sqrt{1+x} \geq 0$  より  $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  は不適である。また  $f(0) = 0 - \sqrt{1+0} = -1$  である。以上のことに注意してグラフを描くと次図のようになる。



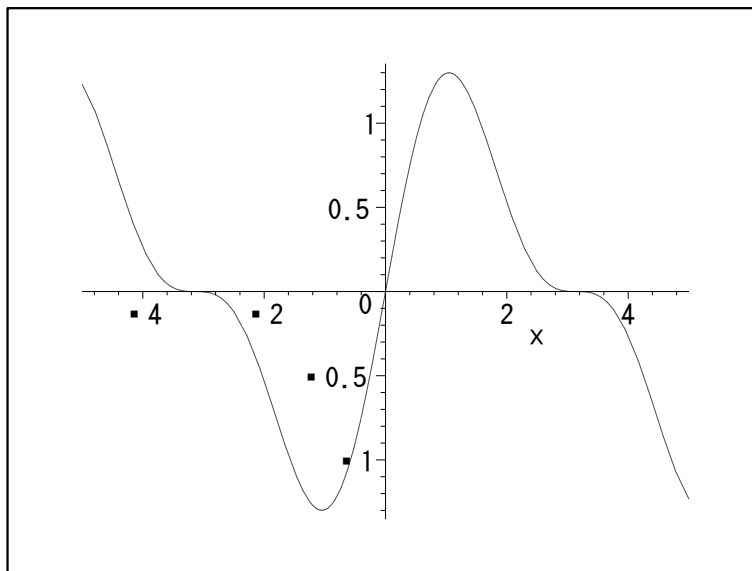
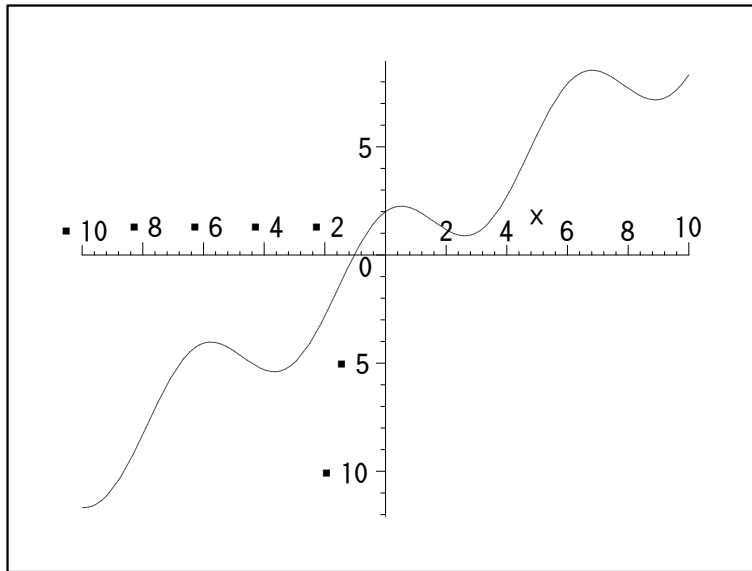
- (6)  $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$  なので  $1 - \frac{1}{x} \geq 0$  が必要である。  $x \geq 0$  のときは  $1 \geq \frac{1}{x}$  より  $x \geq 1$  である。  $x < 0$  のときは常に  $1 - \frac{1}{x} \geq 0$  である。  $f'(x) = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{1}{x^2}$   $x = 1$  においては微分可能ではない。 それ以外では  $f'(x) > 0$  である。  $\lim_{h \rightarrow -0} f(x) = \infty$  ということに注意してグラフを描くと次図のようになる。



- (7)  $f(x) = x + 2 \cos x$  なので  $f'(x) = 1 - 2 \sin x$  である。  $f'(x) = 0$  となるのは  $2n\pi + \frac{\pi}{6}, 2n\pi + \frac{5\pi}{6}$

( $n$  は整数) である。増減表とグラフは次のようになる。

$x$		$2n\pi + \frac{\pi}{6}$		$2n\pi + \frac{5\pi}{6}$		$2(n+1)\pi + \frac{\pi}{6}$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	↗	$2n\pi + \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$	↘	$2n\pi + \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$	↗	$2(n+1)\pi + \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$	↘



(8)  $f(x)$  は周期  $2\pi$  の周期関数なので  $-\pi \leq x \leq \pi$  の範囲で考える。 $f'(x) = \cos x(1 + \cos x) - \sin^2 x = \cos + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = (2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$  とすると、 $\cos x + 1 = 0$  または  $2\cos x - 1 = 0$  である。 $\cos x + 1 = 0$  のとき  $x = -\pi, \pi$  である。 $2\cos x - 1 = 0$

のとき  $x = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$  である。増減表は次のようになるので、グラフは前図のようになる。

$x$	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		$\pi$
$f'(x)$	0	-	0	+	0	-	0
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

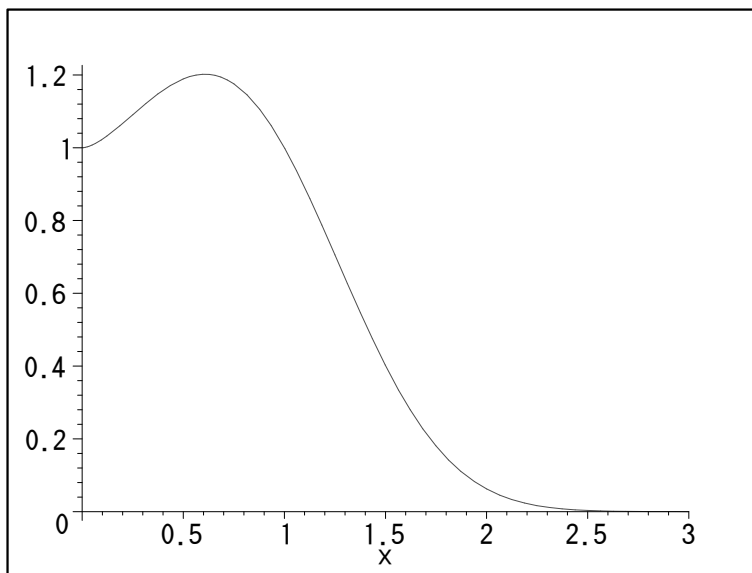
(9)  $f(x) = x^{-x^2}$  なので定義域は  $x > 0$  である。導関数を求めるのに対数微分法を用いる。 $y = x^{-x^2}$  とすると  $\log y = -x^2 \log x$  である。両辺を  $x$  で微分すると  $\frac{1}{y} y' = -2x \log x - x^2 \frac{1}{x} = -2x \log x - 1$  なので  $y' = -x \cdot x^{-x^2} (2 \log x + 1)$  となる。 $f'(x) = 0$  とすると、 $2 \log x + 1 = 0$  なので  $x = e^{-\frac{1}{2}}$  となる。増減表は

$x$		$e^{-\frac{1}{2}}$	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	$f(e^{-\frac{1}{2}})$	$\searrow$

となる。 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  である。また  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$  を求める。 $\log y = -x^2 \log x$  の極限を求める。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \log f(x) &= \lim_{x \rightarrow +0} (-x^2 \log x) = - \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x^2}} \\ &= - \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = - \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-2 \frac{1}{x^3}} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +0} x^2 = 0 \end{aligned}$$

なので、 $0 = \lim_{x \rightarrow +0} \log f(x) = \log \left( \lim_{x \rightarrow +0} f(x) \right)$  となる。よって  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1$  となる。以上を考慮してグラフを書くと次図のようになる。





演習問題 \*5.22  $x_1, x_2 \in [a, b]$  に対し  $F(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1) - f(x)$  とおき、 $F(x)$  の正負を調べることにより命題 5.19 を証明せよ。

$f''(x) < 0$  の場合も同様のできるの、 $f''(x) > 0$  の場合のみ証明する。 $x_1 < x_2$  としても一般性を失わないので、この場合を考える。

$$\begin{aligned} F(x_1) &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_1 - x_1) + f(x_1) - f(x_1) \\ &= f(x_1) - f(x_1) = 0 \\ F(x_2) &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1) + f(x_1) - f(x_2) \\ &= f(x_2) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_2) = 0 \end{aligned}$$

が成立しているの、 $F(x)$  の  $[x_1, x_2]$  における最大値、または最小値を与える  $x_3$  で  $x_1 < x_3 < x_2$  となるものが存在する。このとき  $x = x_3$  で  $F(x)$  は極大または極小なので  $F'(x_3) = 0$  が成立している。 $F''(x) = -f''(x) < 0$  なので  $F'(x)$  は  $[x_1, x_2]$  で単調減少である。よって  $F'(x)$  の  $[x_1, x_2]$  における増減表は次のようになっている。

$x$	$x_1$		$x_3$		$x_2$
$F''(x)$		-		-	
$F'(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	

よって  $(x_1, x_3)$  において  $F'(x) > 0$ 、 $(x_3, x_2)$  において  $F'(x) < 0$  である。よって  $F(x)$  の増減表は次のようになっている。

$x$	$x_1$		$x_3$		$x_2$
$F'(x)$		+	0	-	
$F(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

よって  $(x_1, x_2)$  において  $F(x) > 0$  となるので

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1) > f(x)$$

が成立し、上に凸であることが示された。

演習問題 5.23 次の関数のグラフの凹凸を調べ概形を描け。

$$\begin{aligned} (1) \quad y &= (x - 5)^4(x + 1)^3 & (2) \quad y &= \frac{x^2 + 1}{x} \\ (3) \quad y &= e^{-x^2} & (4) \quad y &= x \log x \end{aligned}$$

(1)

$$\begin{aligned} y' &= 4(x - 5)^3(x + 1)^3 + 3(x - 5)^4(x + 1)^2 \\ &= (x - 5)^3(x + 1)^2\{4(x + 1) + 3(x - 5)\} \\ &= (x - 5)^3(x + 1)^2(7x - 11) \end{aligned}$$

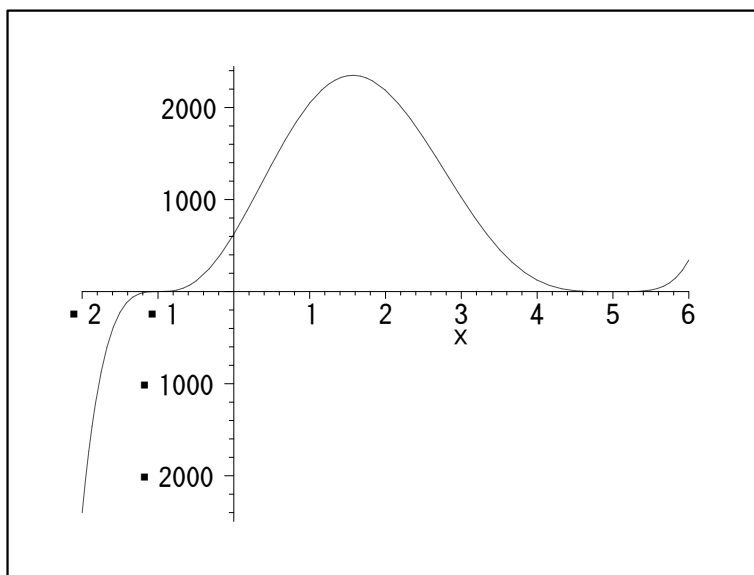
なので  $y' = 0$  を解いて  $x = -1, 5, \frac{11}{7}$  を得る。

$$y'' = 6(x-5)^2(x+1)(7x^2 - 22x + 7)$$

なので  $y'' = 0$  を解いて  $x = -1, 5, \frac{11+6\sqrt{2}}{7}, \frac{11-6\sqrt{2}}{7}$  を得る。よって増減表は次の様になる。

$x$		-1		$\frac{11-6\sqrt{2}}{7}$		$\frac{11}{7}$		$\frac{11+6\sqrt{2}}{7}$		5	
$y'$	+	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$y''$	-	0	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$y$	↗		↗		↗		↘		↘		↗

$x$  軸との交点は  $y = 0$  を解いて  $x = -1, 5$  である。 $y$  軸との交点は  $y$  に  $x = 0$  を代入して  $(-5)^4 = 5^4$  である。以上を考慮してグラフの概形を描くと次のようになっている。



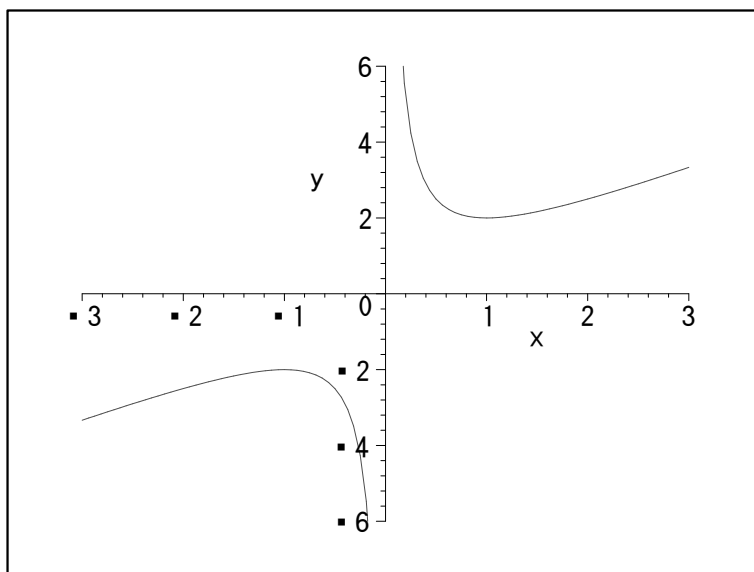
(2)  $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$  なので  $y' = 0$  を解いて  $x = -1, 1$  を得る。 $y'' = \frac{2}{x^3}$  なので増減表は次の様になる。

$x$		-1		0		1	
$y'$	+	0	-	×	-	0	+
$y''$	-	-	-	×	+	+	+
$y$	↗		↘	×	↘		↗

グラフは  $x$  軸とも  $y$  軸とも交わらない。

$$\lim_{x \rightarrow +0} y = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} y = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$$

なのでグラフの概形は次のようになる。



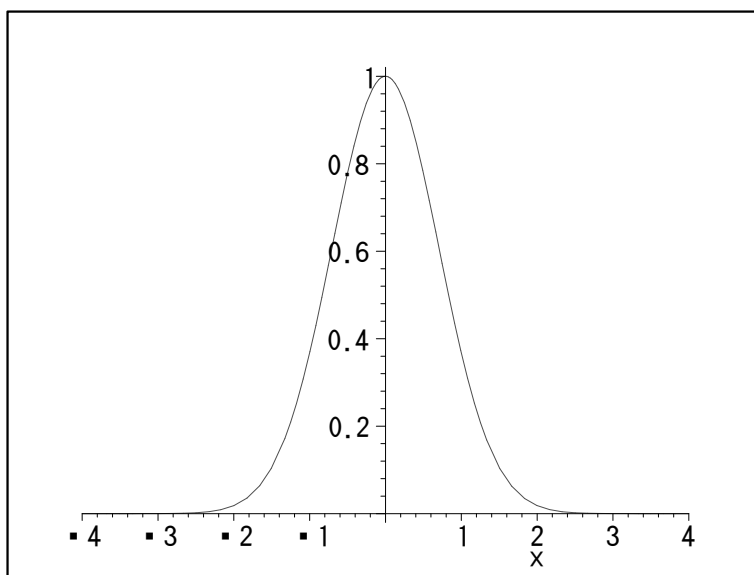
(3)  $y' = -2xe^{-x^2}$  なので  $y' = 0$  を解いて  $x = 0$  を得る。 $y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$  なので  $y'' = 0$  を解いて  $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$  を得る。よって増減表は次のようになる。

$x$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$y'$	+	+	+	0	-	-	-
$y''$	+	0	-	-	-	0	+
$y$	↗		↗		↘		↘

グラフは  $x$  軸とは交わらない。 $y$  軸との交点は  $y = 1$  である。また

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$$

なのでグラフの概形は次のようになる。



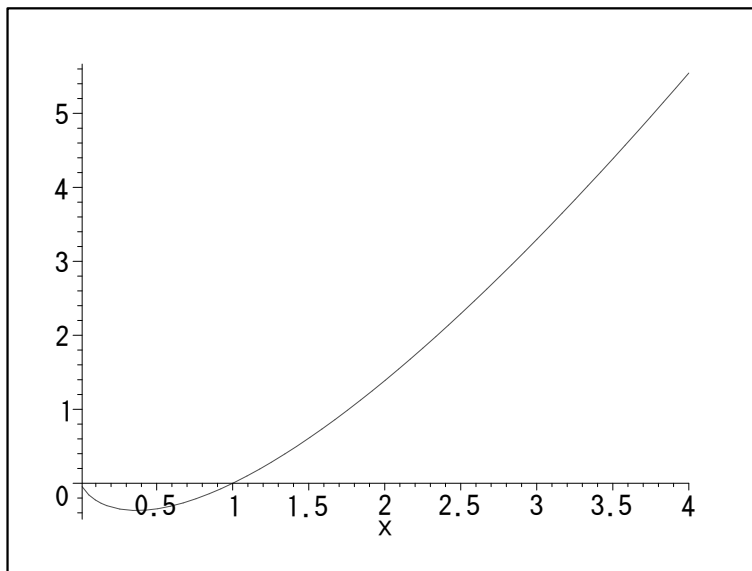
(4)  $y' = \log x + 1$  なので  $y' = 0$  を解いて  $x = \frac{1}{e}$  を得る。 $y'' = \frac{1}{x}$  なので  $y'' = 0$  となる  $x$  は存在しない。よって増減表は次のようになる。

$x$	0		$\frac{1}{e}$	
$y'$	×	-	0	+
$y''$	×	+	+	+
$y$		↘		↗

$x$  軸との交点は  $x = 1$  であり、 $y$  軸とは交わらない。また  $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$  である。この後学んだロピタルの定理を用いると

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} x \log x &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow +0} x = 0 \end{aligned}$$

が分かる。以上からグラフの概形は次のようになっている。



演習問題 5.24 以下の極限值を求めよ。

- |  |   |   |
|--|---|---|
| (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3}$                     | (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\log(1+x)}$ | (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos(\alpha x)}{\log \cos(\beta x)}$ |
| (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0)$              | (5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{e^x}$           | (6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1+3^x)}{x}$                     |
| (7) $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right)$ | (8) $\lim_{x \rightarrow 0} x \log x$                       | (9) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$                        |

$$(10) \lim_{x \rightarrow +0} x^x \qquad (11) \lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{1}{x}} \qquad (12) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$$

(1)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - x \cos x)'}{(x^3)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{3x^2} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\log(1+x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x})'}{(\log(1+x))'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\frac{1}{1+x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)(e^x + e^{-x}) = 2 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos(\alpha x)}{\log \cos(\beta x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\log \cos(\alpha x))'}{(\log \cos(\beta x))'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos(\alpha x)} \cdot (-\sin(\alpha x)) \cdot \alpha}{\frac{1}{\cos(\beta x)} \cdot (-\sin(\beta x)) \cdot \beta} \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\beta x)}{\cos(\alpha x)} \cdot \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)} \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\beta x)}{\cos(\alpha x)} \cdot \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x} \cdot \frac{\beta x}{\sin(\beta x)} \cdot \frac{\beta}{\alpha} \\ &= \frac{\alpha^2}{\beta^2} \end{aligned}$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a^x - b^x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} (\log a \cdot a^x - \log b \cdot b^x) = \log a - \log b$$

(5)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{e^x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^5)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4}{e^x} = 5 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^4)'}{(e^x)'} = 5 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3}{e^x} \\ &= 20 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^3)'}{(e^x)'} = 20 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{e^x} = 60 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} = 60 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} \\ &= 120 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = 120 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1+3^x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log(1+3^x))'}{x'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+3^x} \log 3 \cdot 3^x \\ &= \log 3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{1+3^x} = \log 3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{3^x} + 1} \\ &= \log 3\end{aligned}$$

(7)

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} = \frac{1}{x^2} - \frac{\cos x}{x \sin x} = \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sin x} = \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \cdot \frac{x}{\sin x}$$

となるので (3) の結果を用いる。

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \cdot \frac{x}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

(8)

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow +0} x = 0$$

(9)  $t = \frac{1}{x}$  とおくと  $x \rightarrow \infty$  のとき  $t \rightarrow +0$  である。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t} \sin t = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

(10)  $y = x^x$  に対し  $\log y = x \log x$  である。

$$\lim_{x \rightarrow +0} \log y = \lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$$

が成立している。ここで (8) の結果を用いた。 $\log x$  は単射であり、連続関数なので

$$\log 1 = 0 = \lim_{x \rightarrow +0} \log y = \log \left( \lim_{x \rightarrow +0} y \right)$$

より  $\lim_{x \rightarrow +0} y = 1$  となる。

(11)  $0 < a < b$  かつ  $X > 0$  に対し  $a^X < b^X$  が成立する。 $x$  が  $0$  に近づくとき  $x < \frac{1}{2}$  としてよ

い。 $0 < x < \frac{1}{2}$  かつ  $\frac{1}{x} > 0$  なので  $0 < x^{\frac{1}{x}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$  となる。 $x \rightarrow +0$  のとき  $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$  なので

$0 \leq \lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{1}{x}} \leq \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = 0$  なので  $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{1}{x}} = 0$  である。

(12)  $y = \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$  なので  $\log y = \log \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \log \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)$  となる。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \log y &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\log \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)\right)'}{x'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{a^x + b^x}{2}} \left(\frac{a^x \log a + b^x \log b}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \log a + b^x \log b}{a^x + b^x} \\ &= \frac{\log a + \log b}{2} = \frac{1}{2} \log ab = \log(ab)^{\frac{1}{2}} = \log \sqrt{ab} \end{aligned}$$

が成立する。 $\log x$  は単射であり、連続なので  $\lim_{x \rightarrow 0} y = \sqrt{ab}$  となる。即ち

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt{ab}$$

となる。