数学序論要綱 #1　　2010–4–7　　河野

1 命題と論理

この章では (数学的)「論理」について学ぶ。数学的と括弧を付けた理由は，数学の論理は一般に使われている論理よりもある意味では厳密だが，その全てを定式化できているわけではないという点にある。一般に使われている論理には色々なものがある。「正しい」「間違っている」以外にも，「多分」「きっと」「べきである」等々色々なものが考えられる。数学的に定式化できているのはその「単純」な場合だけである。例えば,「風が吹いたのに雨が降った」と「雨が降ったのに風が吹いた」を区別できない (しない)。付け加えておくと，ファジー論理，様相論理，量子論理等そのような拡張 (または変形) の試みもなされている。我々は以下で「論理」を取り扱うが広い意味の論理と区別したい時には特に**数理論理** (*mathematical logic*) または**記号論理** (*symbolic logic*) と呼ぶ。

我々の脳は論理を考えるために進化したのではなく，進化した結果たまたま「論理も考えられる」ようになったようである。これは我々が自転車に乗れるようになるために直立歩行を始めたのではなく，直立歩行を始めた結果たまたま「自転車にも乗れるようになった」のと事情は同じであろう。自転車に乗るために練習が必要であるように，論理をきちんと扱うためには練習が必要である。

1.1 論理積・論理和

真 (T) または偽 (F) が定まっている文章を**命題** (*proposition*) という。例をいくつか見よう。命題自身に P のように名前をつける。

$$P_1 \;:\; 1 = 1$$

P_1 は「1 は 1 に等しい」という内容をもち，正しい命題である。数式で書いてあっても，言葉で書いてあっても内容は同じである。

$$P_2 \;:\; 1 \neq 1$$

P_2 は正しくない命題である。真偽が定まっているのが命題なので，間違っているのも命題である。

P_3 ： 12345 は大きな数である。

P_3 は真偽が確定しているとは言いがたいので命題ではない。ただし，たとえば「10000 以上は大きな数である」ことが事前に約束されている場合は正しい命題となる。

2 以上の自然数 p が p および 1 以外で割り切れないとき p を素数と呼ぶ。p と $p+2$ が共に素数のときこれらを双子素数と呼ぶ。

P_4 ： 双子素数は無限個存在する。

この言明の真偽は今のところ知られていない。真偽の知られていない数学的言明に対する態度は 2 つある。(無意識な場合も含め) 多くの数学者の立場は「素数という概念が確定したものである以上，双子素数は無限に存在するかしないかのいずれかであって，真偽が知られていないだけであり，真か偽かは確定しているので P_4 は命題である」というものである。少数であるが次の様な意

見もある。「我々は神ではないので，命題の真偽があらかじめ定まっているということはできない。証明ないし反証されて初めて真偽が確定すると考えられる。よって P_4 を命題と呼ぶことはできない。」このような立場を**直感主義** (*intuitionism*) と呼ぶ。我々は一応前者の立場を採用しておこう。

$$P_5 \ :$$「クレタ人は嘘つきである」とエピメニデスが言った。

エピメニデスはクレタ島のクノッソスの生まれの詩人・預言者である。エピメネデスがクレタ人であるという点がポイントである。「クレタ人が嘘つき」であるとすると，エピメニデスはクレタ人なので嘘つきである。その彼が言った「クレタ人は嘘つきである」ということは嘘なので，クレタ人は嘘つきではない。よってエピメニデスは嘘つきでありかつ嘘つきでない。「クレタ人が嘘つきでない」とすると，エピメニデスはクレタ人なので嘘つきではない。その彼が言った「クレタ人は嘘つきである」ということは正しいので，クレタ人は嘘つきである。よってエピメニデスは嘘つきでありかつ嘘つきでない。この様にいずれの場合も「エピメニデスは嘘つきでありかつ嘘つきでない」という矛盾が発生する。矛盾を発生させる P_5 のようなものを**自己矛盾命題** (*self–contradictory proposition*) と呼ぶ。「命題」と呼んでいるがここで定義した意味での命題ではない。

演習問題 1.1　次の P_1 から P_7 は命題かどうか調べよ。また命題であるものに対して真偽を確かめよ (微積分の知識を必要とする問題もある)。
(1) $P_1 : 1 \geqq 1$
(2) $P_2 : 2^{2010}$ は素数である。
(3) $P_3 :$ 12345 は 3 で割り切れる。
(4) $P_4 :$ 微分可能な関数は連続である。
(5) $P_5 :$ 連続な関数は微分可能である。
(6) $P_6 :$ 数学は難しい。
(7) $P_7 : n = 2$ に対し $x^n + y^n = z^n$ を満たす自然数 x, y, z は存在しない。

命題が幾つかあった時それを組合わせて新しい命題を作る方法がある。**「かつ」**(論理積，logical product, 合接，conjunction)，**「または」**(論理和，logical sum, 離接，disjunction)，**「$\cdots$ でない」**(否定，negation)，**「ならば」**(含意，inplication) などがそれである。次の記号を使用する。

$$\begin{array}{lcl} \neg P & : & P \text{ でない} \\ P \vee Q & : & P \text{ または } Q \text{ である} \\ P \wedge Q & : & P \text{ かつ } Q \text{ である} \\ P \implies Q & : & P \text{ ならば } Q \text{ である。} \end{array}$$

それぞれの記号の意味はほとんど明らかであろう。しかし，きちんと議論するためには次の様な真理表を使って定義する。

P	$\neg P$
T	F
F	T

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \implies Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

左の表では P が真 (T) のとき P の否定 $\neg P$ は偽 (F) であり，P が偽 (F) のとき $\neg P$ は真 (T) であることを表している。右の表の $P \wedge Q$ の所は P が真 (T) かつ Q が真 (T) であるとき $P \wedge Q$ が真であり，それ以外は偽 (F) であることを表している。他の欄も同様である。

「または」には少し注意が必要かもしれない。日常では「一方のみが正しいとき正しい」という使われ方をする時がある。

「ランチにはコーヒーまたは紅茶が付いております。」
「両方下さい。」

レストランでこう言うと「ダメ」と言われるかもしれないが，数学的論理としては間違っていない。数理論理学でこのような「または」の使い方に対応するものとして**排他的論理和** (*exclusive OR*) があるが我々は使用しない。排他的論理和は P と Q が共に真のときは偽になるが，それ以外は論理和 (「または」) と同じである。

「$P \implies Q$」にも注意が必要である。日常の論理では

仮定部分 (P) が正しければ結論部分 (Q) が正しい

という使われ方はするが，仮定部分が偽のときの議論はあまりされない。数理論理では「仮定 (P) が正しくないとき」の「$P \implies Q$」の真偽に関しても確定させておく必要があるが，何故上の真理表の様に決めるのだろう。そのことについて考える。次の命題は正しいであろうか。

$$x = 1 \implies x^2 = 1$$

この命題は正しい命題と考えるのが当然と思うかもしれない。しかし仮定が偽で結論が偽のとき命題が偽と真理表で定義すると，$x = 2$ のとき，仮定・結論ともに偽となり，この命題は偽になる。

仮定が偽で結論が真のとき偽と真理表で定義すると，$x = -1$ のとき，仮定が偽，結論が真となり，この命題は偽となる。

いずれの場合も通常の感覚で考える「真偽」と少し異なる結果になる。このような世界でも数学ができないわけではないが，少しやってみるとわかるように，かなり窮屈な世界である。

以上の様な事から「ならば」の真偽は前述の真理表のように定義することとする。「ならば」は後で「必要条件・十分条件」を学ぶ所でまた取り上げるが，十分注意が必要な概念であることは強調しておく。

我々がよく使っている記号「 , 」**カンマ** (*comma*) にも注意が必要である。例えば次の様な使い方をする。

$x^2 - 1 = 0$ を解いて $x = -1, 1$

x は $x > 0, x^2 = 1$ を満たすので $x = 1$

最初のカンマは「または」で２番目のカンマは「かつ」である。実際試験の解答でも，自分で書いたカンマを誤解して間違うという例を見かける。どちらにも使えて便利であるが，混同しがちになるので注意する必要がある。

$P \wedge Q, \neg P$ の様に命題 P, Q と $\wedge, \vee, \neg$ を使って作られる言明を**論理式** (*fomula*) という。論理式の中には P の真偽によらずつねに正しい論理式 $P \vee \neg P$ や，つねに偽である論理式 $P \wedge \neg P$ もある。つねに正しい論理式は**恒真命題** (*tautology*) と呼ばれる。$P \wedge \neg P$ を**矛盾** (*contradiction*) と呼ぶこともある。

$(P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$ を $P \Longleftrightarrow Q$ と表す。論理式 X, Y に対し $X \Longleftrightarrow Y$ が恒真命題であるとき，X と Y は**同値** (*equivalent*) であるといい，$X \equiv Y$ と表す。定義からすぐ分るように X の真理表と Y の真理表が同じならば 2 つの論理式は同値である。

命題 1.1 [(1)] 次が成立する。
(1) $\neg(\neg P) \equiv P$ (2 重否定の法則)
(2) $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ (分配法則)
(3) $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ (分配法則)
(4) $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$ (de Morgan の法則)
(5) $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$ (de Morgan の法則)
(6) $(P \implies Q) \equiv (\neg P \vee Q)$
(7) (6) と (1), (5) から $P \implies Q$ の否定は $P \wedge \neg Q$ が分かる。
(8) **対偶** (*contraposition*) $(P \implies Q) \equiv (\neg Q \implies \neg P)$ である。これは元の命題と対偶命題が同値である事を示している。

証明 ここでは (6) のみ証明しておく。残りは演習問題とするので，各自試みること。
(6) を証明するためには，$\neg P \vee Q$ の真理表をつくって $P \implies Q$ と比較すればよい。

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$P \implies Q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

上の真理表から分かるように，$\neg P \vee Q$ と $P \implies Q$ の真理値は一致しているので，同値であることが分かる。 ■

命題 1.1 に関連して注意をいくつか。(7) から $P \implies Q$ を否定するためには仮定 (P) が正しく，結論 (Q) が間違っている例を見つければよいことが分かる。このような例を**反例** (*counterexample*) という。

(2)，(3) は分配法則と呼ばれる。(2) においては $\wedge$ を $\times$ に，$\vee$ を $+$ に変えたものは掛け算における分配法則なので，そう呼ばれる。(3) においては $\vee$ を $\times$ に，$\wedge$ を $+$ に変えたものがそうなっている。

(8) は**背理法** (*reduction to absurdity*) の根拠を与えている。背理法とは，仮定 (P) と結論の否定 $(\neg Q)$ から矛盾を導くことで，$P \implies Q$ を証明する論法であった。

ある論理体系が**矛盾** (*contradiction*) を含むというのは，ある命題 X に対し，その命題と否定命題の両方，即ち $X \wedge \neg X$ が証明されることをいう。$P \implies Q$ が正しいとき，$\neg Q \implies \neg P$ が成立するので，P を仮定すると $P \wedge \neg P$ すなわち矛盾が出てくる。この逆も成立して，これを利用して $P \implies Q$ を証明するのが背理法である。

(2) と (3)，(4) と (5) を見てみよう。(2) における $\wedge$ を $\vee$ に，$\vee$ を $\wedge$ に変えると (3) が得られる。(3) において $\wedge \to \vee$，$\vee \to \wedge$ とすると (2) が得られる。(4) において同様な変換をすると (5)

[(1)] ここの命題の使い方は最初に定義した「命題」とは異なる。定理・補題・系・例・演習問題などと並んで数学で使われており，この要綱で使われる。ここでの命題の意味は「正しい命題であって，理論体系のなかで重要な言明」ぐらいに解釈しておいてほしい。同様に定理は「正しい命題であって，理論体系のなかで特に重要な言明」，補題は「定理，命題を証明するために用いる言明」，系は「定理などから容易な考察によって導出される言明」に用いる。定理・命題・補題・系の区別は絶対的なものではなく人により異なる用語が使われることは勿論ある。

が得られ,(5) からは (4) が得られる。(2) と (3) および (4) と (5) が共に恒真命題であるのは偶然ではない。X, Y を命題 P, Q 等と $\wedge, \vee, \neg$ から構成されている論理式とする。X, Y における $\wedge \to \vee$, $\vee \to \wedge$ として変換して得られる論理式を X', Y' とするとき

$$X \equiv Y \implies X' \equiv Y'$$

が成立する。これは論理における**双対原理** (*duality principle*) と呼ばれる (演習問題 1.3 参照)。

演習問題 1.2　真理表を書くことにより命題 1.1 を証明せよ。

演習問題 *1.3　[2]論理における双対原理を証明せよ。

日常生活に関する叙述の対偶では時間などが逆転するため，一見するとおかしな対偶命題になることがある。このような場合，時間逆転等を考慮して表現を修正すると自然に見える対偶命題をつくることができる。

演習問題 1.4　次の命題 (?) 対偶命題をつくれ。

(1) 彼は怒られないと勉強しない。

(2) 数学系科目は勉強しないと合格しない。

演習問題 1.5　(天国への道) ある人が死んで，あの世への道を歩いてゆくと，二又に分かれた分岐点に出た。一方の道は天国に通じ，もう一方の道は地獄への道である，ということはわかっているが，どちらが天国への道なのかはわからない。その分岐点には一匹の悪魔がいて，yes or no で答えられる質問に１回だけ答えてくれる。しかし悪魔には，常に正直に答える正直悪魔と，常にウソを答えるウソつき悪魔の２種類がいて，そこにいるのがどちらなのかは，全くわからない。さて，１回だけの質問で，天国への道を知るには，いったいどのような質問をすればよいのだろうか？(Hint: 命題 A を「右の道は天国への道である。」というものとし，命題 B を「あなたは正直な悪魔である。」としてみよう。これらの命題とその否定を，真理表を使って，うまく組み合わせる。)

[2]星印 ($*$) が付いている演習問題は全員が解く事を要求していない。興味のあるもののみを対象と考えている問題である。