2.4 写像

A, B を集合とする。A の各要素 a に対し B の要素 b を対応させる規則 f を，集合 A から集合 B への**写像** (*mapping,map*) といい，

$$f : A \longrightarrow B, \qquad \text{または} \qquad A \xrightarrow{f} B$$

のように表す。

元 $a \in A$ に対応する元 $b \in B$ を写像 f による a の**像** (*imarge*) といい，$b = f(a)$ と表す。逆に，a を f による b の**原像** (*preimarge*) という。元 a に対し像は一通りに定まる (このようなとき**一意的**という) が，元 b に対し原像は一意的とは限らない。

元 x に対し $f(x)$ が対応しているとき $x \longmapsto f(x)$ と書くことがある。これをひとまとめにして書くこともある。例えば 2 次関数 $y = f(x) = x^2$ を実数全体の集合 $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像と考える。f は実数 $x \in \mathbb{R}$ に対し x^2 を対応させるので

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

と書くことができる。

定義 2.6

(1) 写像 $f : A \longrightarrow B$ において，A を**定義域** (*domain*) といい，B を**終域** (*codomain*) という。
$f(A) = \{ f(a) \mid a \in A \}$
$= \{ b \in B \mid \exists a \in A \ b = f(a) \}$ を**値域** (*range*) あるいは**像** (*image*) という。

(2) 集合 A から A 自身への写像で，任意の要素 $a \in A$ を a に写す写像を**恒等写像** (*identity map*) といい，id_A または 1_A という記号で表す (すなわち「$\forall a \in A \ id_A(a) = a$ 」である)。

(3) 写像 $f : A \longrightarrow B$ において $f(A) = B$ のとき，f を A から B への**全射** (*surjection*)，または**上への写像** (*onto map*) という。論理記号を用いて表すと「 $\forall b \in B \ \exists a \in A \ \ b = f(a)$ 」である。

(4) 写像 $f : A \longrightarrow B$ において $a_1 \neq a_2$ となる全ての $a_1, a_2 \in A$ に対して，常に $f(a_1) \neq f(a_2)$ となる時，f を**単射** (*injection*)，または **1 対 1 の写像** (*one-to-one map*) という。論理記号を用いて表すと「 $\forall a_1, a_2 \in A \ \ a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)$ 」である[(1)]。

(5) 写像 $f : A \longrightarrow B$ が全射かつ単射である時，**全単射** (*bijection*) という。

(6) ２つの写像 $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ に対し，$h(a) = g(f(a))$ で定められる写像 $h : A \longrightarrow C$ を定義できる。これを f と g の**合成写像** (*composite mapping*) といい，$h = g \circ f$ という記号で表す。

(7) ２つの写像 $f : A \longrightarrow B$ と $g : C \longrightarrow D$ が次を満たすとき 2 つの写像は等しいといい，$f = g$ と書く；$A = C$ かつ $B = D$ および

$$\forall a \in A \ \ f(a) = g(a)$$

[(1)] この条件は対偶をとると「 $\forall a_1, a_2 \in A \ \ f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2$ 」となる。写像が一対一であることを示すときにこの形の方が示しやすい場合もある。

が成立する。即ち，即ち定義域と終域が等しく，元を対応させるルールも等しいときである。

$A = \{1,2,3\}$，$B = \{1,2\}$ とする。定義域が A，終域が B である写像をすべて列挙してみよう。1 の行き先，即ち $f(1)$ の可能性は $1,2$ の 2 通りである。2 の行き先，3 の行き先も同様にそれぞれ 2 通りである。f_1 を $f_1(1) = 1, f_1(2) = 1, f_1(3) = 1$ と定義すると f_1 は A から B への写像である。f_2 を $f_2(1) = 1, f_2(2) = 1, f_2(3) = 2$ と定義すると f_2 は A から B への写像である。以下列挙していく。

$$
\begin{aligned}
&f_3(1) = 1, f_3(2) = 2, f_3(3) = 1, \qquad && f_4(1) = 1, f_4(2) = 2, f_4(3) = 2 \\
&f_5(1) = 2, f_5(2) = 1, f_5(3) = 1, \qquad && f_6(1) = 2, f_6(2) = 1, f_6(3) = 2 \\
&f_7(1) = 2, f_7(2) = 2, f_7(3) = 1, \qquad && f_8(1) = 2, f_8(2) = 2, f_8(3) = 2
\end{aligned}
$$

以上 f_1 から f_8 までの 8 個で尽くされている。このうち f_1, f_8 は全射ではなく，それ以外は全射である。単射は今の場合存在しない。

次に定義域が B，終域が A である写像をすべて列挙する。

$$
\begin{aligned}
&g_1(1) = 1, g_1(2) = 1, \qquad && g_2(1) = 1, g_2(2) = 2, \qquad && g_3(1) = 1, g_3(2) = 3 \\
&g_4(1) = 2, g_4(2) = 1, \qquad && g_5(1) = 2, g_5(2) = 2, \qquad && g_6(1) = 2, g_6(2) = 3 \\
&g_7(1) = 3, g_7(2) = 1, \qquad && g_8(1) = 3, g_8(2) = 2, \qquad && g_9(1) = 3, g_9(2) = 3
\end{aligned}
$$

以上 g_1 から g_9 までの 9 個で尽くされている。このうち g_1, g_5, g_9 は単射ではなく，それ以外は単射である。全射は今の場合存在しない。

演習問題 2.8　$A = \{1,2\}$ とする。定義域および終域がともに A である写像をすべて列挙せよ。その中で単射であるものをすべて挙げよ。また全射であるものをすべて挙げよ。

演習問題 2.9　$A = \{1,2,3\}$ とする。定義域および終域がともに A である写像で単射であるものををすべて列挙せよ。また全射であるものをすべて列挙せよ。

演習問題 *2.10　$\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への写像で全射であるが，単射でないものをあげよ。また $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への写像で単射であるが，全射でないものをあげよ。

A, B が実数や複素数の部分集合のとき写像 $f : A \longrightarrow B$ を**関数**[(2)](*function*) と呼ぶことが多い。$f : X \longrightarrow Y$ が関数のとき y が x の式で与えられる場合がよくある。例えば $y = x^2$ の関係があるとき $y = f(x) = x^2$ という関係がある。この $y = f(x) = x^2$ は像であって関数 (写像) ではないが，歴史的使用法 (古典的使用法) により，関数 $y = f(x) = x^2$ という表現をすることがある。解析学においてはむしろこの表現の方が多いかもしれない。

定義域が明示的に述べられていないとき，考えられる最大の集合をとることも多い。例えば定義域の指定なしに関数 $y = \dfrac{1}{x}$ と言った場合，解析学 I，II では通常実数値関数の範囲で考えるので，$X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ と考える。

例 2.7

(1)　$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ と定義する。この場合，定義域は $\mathbb{R}$ であり，終域も $\mathbb{R}$ である。

(2) 元々は函数と書いていたが，当用漢字から「函」の字が外れたために，この漢字を使用するようになった。原義を尊重して函数を用いる人もいる。

$f(1)=f(-1)=1$ が成立する。すなわち，異なる 2 つの点の行き先で同じになるものがあるので f は単射ではない。

値域 $f(\mathbb{R})$ は 0 以上の実数全体の集合 $f(\mathbb{R})=\{\,y\in\mathbb{R}\mid y\geqq 0\,\}=[\,0,\,\infty\,)$ である。よって f は全射ではない。

(2) $f:\mathbb{R}\longrightarrow[\,0,\,\infty\,)$ を $f(x)=x^2$ で定義すると，この f は (1) の f と終域を除いて同じ値をとる写像あるが，(1) の f は全射ではないが，(2) の f は全射である。

(3) $f(x)=x^2$ という同じ 2 次関数を考える。しかし今度は，定義域を制限して，f を $f:[\,0,\,\infty\,)\longrightarrow\mathbb{R}$ という写像と考える。値域 $f([\,0,\,\infty\,))$ はやはり $[\,0,\,\infty\,)$ となる。

この場合，f は $[\,0,\,\infty\,)$ 上では単調増加であり，$x_1\neq x_2$ ならば必ず $f(x_1)=x_1^2\neq x_2^2=f(x_2)$ となるので単射である。しかし全射ではないことは明らかである。

(4) しつこく $f(x)=x^2$ という同じ 2 次関数を考える。しかし今度は，定義域と終域を共に制限して，f を $f:[\,0,\,\infty\,)\longrightarrow[\,0,\,\infty\,)$ という写像と考える。

(3) で述べた理由から f は単射であり，さらに，値域 $f([\,0,\,\infty\,))$ は $[\,0,\,\infty\,)$ であるので全射となり，全単射となる。

(5) 更にしつこく $f(x)=x^2$ という同じ 2 次関数を考える。今度は，定義域と終域を共に $A=\{\,x\in\mathbb{Q}\mid x\geqq 0\,\}$ として，f を $f:A\longrightarrow A$ という写像と考える。このとき f は単射だが，全射ではない ($\rightarrow$ 演習問題 2.12)。

演習問題 2.11　以下の (1)~(9) の写像について，

(a) 単射であるが全射ではない。
(b) 全射であるが単射ではない。
(c) 単射でも全射でもない。
(d) 全単射である。

のどれに相当するのかを判定せよ。

(1) $f_1:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ を $f_1(x)=e^x$[(3)] と決める。
(2) $f_2:(\,0,\,\infty\,)\longrightarrow\mathbb{R}$ を $f_2(x)=e^x$ と決める。
(3) $f_3:\mathbb{R}\longrightarrow(\,0,\,\infty\,)$ を $f_3(x)=e^x$ と決める。
(4) $f_4:(\,0,\,\infty\,)\longrightarrow(\,0,\,\infty\,)$ を $f_4(x)=e^x$ と決める。
(5) $f_5:(\,0,\,\infty\,)\longrightarrow\mathbb{R}$ を $f_5(x)=\log x$ と決める。
(6) $f_6:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ を $f_6(x)=\cos x$ と決める。
(7) $f_7:\mathbb{R}\longrightarrow[\,-1,\,1\,]$ を $f_6(x)=\cos x$ と決める。
(8) $f_8:[\,0,\,\pi\,]\longrightarrow[\,-1,\,1\,]$ を $f_8(x)=\cos x$ と決める。
(9) $f_9:[\,0,\,\pi\,]\longrightarrow\mathbb{R}$ を $f(x)=\cos x$ と決める。

演習問題 2.12　例 2.7 (5) の f が全射でないことを示せ。

命題 2.8 $f:A\longrightarrow B$ が全単射であれば，B の任意の要素 b に対して，$f(a)=b$ となる A の要素 a がただ一つ存在する。

証明　$f:A\longrightarrow B$ は全射なので，$f(A)=B$ である。従って，B の任意の要素 b に対して，$b\in f(A)=\{\,f(a)\mid a\in A\,\}$ なので，ある $a\in A$ が存在して，$b=f(a)$ となっている。

[(3)]高校で数学 III を学んでいない学生は初めてかもしれないが，e は自然対数の底と呼ばれる重要な数である。値は $2.71828\cdots$ である。これに関しては後で取り扱う。ここでは e は 1 より大きい実数であることを知っていればよい。

f は単射なので，$f(a_1) = f(a_2) = b$ であるとすると $a_1 = a_2$ でなければならない。すなわち，$f(a) = b$ となるような a はただ一つである。 ■

$f : A \longrightarrow B$ が全単射である時，$b \in B$ に対して，$b = f(a)$ を満たす $a \in A$ を対応させる写像が定義できる。これを f の**逆写像** (inverse map) といい，$f^{-1} : B \longrightarrow A$ という記号で表す。すなわち，$f(a) = b$ の時，$f^{-1}(b) = a$ である。従って特に，

$$f^{-1} \circ f = id_A \qquad f \circ f^{-1} = id_B$$

が成り立つ。

例 2.9

(1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow (\,0, \infty\,)$ を $f(x) = e^x$ とすると f は全単射である。従って，f の逆写像 $f^{-1} : (\,0, \infty\,) \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在する。これが $f^{-1}(x) = \log x$ である。

(2) $f : [\,0, \infty\,) \longrightarrow [\,0, \infty\,)$ を $f(x) = x^2$ とすると全単射となる。従って，この逆写像 $f^{-1} : [\,0, \infty\,) \longrightarrow [\,0, \infty\,)$ が存在する。これが $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ である。

(3) $f : \left[\,-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\,\right] \longrightarrow [\,-1, 1\,]$ を $f(x) = \sin x$ とすると全単射である。従って，逆写像 $f^{-1} : [\,-1, 1\,] \longrightarrow \left[\,-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\,\right]$ が存在する。この関数を $f^{-1}(x) = \mathrm{arcsin}\, x$ と書き，アークサイン x と読む。$\sin^{-1} x$ と書かれることが多いが，間違えやすい記号なので，この講義では採用しない。この関数は後の章で扱うが，重要な関数である。

命題 2.10 $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow A$ であり，$g \circ f = id_A$ であったとする。

(1) f は単射である。

(2) g は全射である。

証明 (1) の証明：$a_1, a_2 \in A$ を $a_1 \neq a_2$ となるものとする。$g \circ f = id_A$ であるので，

$$g(f(a_1)) = a_1 \neq a_2 = g(f(a_2))$$

である。$f(a_1) = f(a_2)$ ならば，当然 $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$ とならなければならないが，$g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$ であるので，$f(a_1) \neq f(a_2)$ であり，従って f は単射である。

(2) の証明： $g \circ f = id_A$ であるので，$g(f(A)) = A$ である。$f(A) \subseteq B$ であるから，$A = g(f(A)) \subseteq g(B)$ である。しかし，$g(B) \subseteq A$ であるから，$g(B) = A$ が成り立つ。 ■

演習問題 2.13 $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ とする。

(1) f と g が単射ならば，$g \circ f : A \to C$ も単射であることを証明せよ。

(2) f と g が全射ならば，$g \circ f : A \to C$ も全射であることを証明せよ。

ヒント：単射と全射の定義が満たされることを示せば良い。

演習問題 2.14 X, Y を集合とし，$f : X \longrightarrow Y$ とする。A, B を X の部分集合とする。

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ を証明せよ。

(2) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ を証明せよ。

(3) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ とはならない例を挙げよ。

ヒント： (1), (2) については，問題 2.5 のヒントを参照。(3) については，そういう例を作れば良い。