

3 複素平面とオイラーの公式

3.1 複素数の四則

2 次方程式

$$x^2 = -1 \quad (1)$$

は、実数解を持たない。2 乗して負になる数は、実数には存在しないからである。2 次方程式 (1) が解を持つようにするためには、2 乗して -1 となる数の導入が必要である⁽¹⁾。 $i^2 = -1$ となる数を i で表し、**虚数単位**と呼ぶ。この i を用いれば、2 乗して $-1, -2, -3, \dots$ となる数は、 $\pm i, \pm\sqrt{2}i, \pm\sqrt{3}i, \dots$ と表すことができる。このように、2 乗して負となる数を**純虚数**と呼ぶ。さらに、実数と純虚数の和

$$\alpha = a + bi \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

を**複素数**と呼ぶ。 a, b をそれぞれ、複素数 α の**実部**、**虚部**と呼び、

$$a = \operatorname{Re}(\alpha), \quad b = \operatorname{Im}(\alpha)$$

で表す。また、複素数全体の集合を \mathbb{C} で表す。すなわち、

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

となる。さて、虚部が 0 の複素数 ($b = 0$) は、実数であるから、実数全体の集合 \mathbb{R} は、複素数全体の集合 \mathbb{C} の部分集合となっている。

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

実数 $a, b, c \in \mathbb{R}$ を係数に持つ 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

の解は、

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

となり、必ず複素数の範囲に解を持つ。

では、複素数 a_n, \dots, a_0 に対し代数方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0) \quad (2)$$

の解を考えると、さらなる数の拡張が必要となるのであろうか？この問いに対して、次の定理が成り立つ：

⁽¹⁾実際の複素数は 2 次方程式の解からではなく、3 次方程式の解の公式から考えられるに到った。最終的に実数解が得られる場合でも計算途中で 2 乗して負になる数が出てくる場合があった。最初は計算の途中ででてくる想像上の数と思われており、**虚数** (imaginary number) という言葉にその名残がある。

定理 3.1 [代数学の基本定理] n 次代数方程式 (2) は、いつでも n 個 (k 重解は k 個と数える) の解を複素数の範囲に持つ。

この定理により、高次の代数方程式を考えても、数の範囲を拡張する必要はないのである。すなわち、代数方程式を考える限り、複素数で十分であることが解る。

まず、2つの複素数 $\alpha = a + bi, \beta = c + di \in \mathbb{C}$ が等しいとは、次が成り立つことである：

$$\alpha = \beta \iff a = c, \quad b = d$$

特に、

$$\alpha = 0 \iff a = 0, \quad b = 0$$

である。

複素数の四則演算は、 $i^2 = -1$ に注意すれば、実数の場合と変わらない。加法、減法、乗法、除法は i を単なる文字だと考え、 i^2 が出てきたら -1 に変えればよい。即ち

$$\begin{aligned} (a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i \\ (a + bi) - (c + di) &= (a - c) + (b - d)i \\ (a + bi) \cdot (c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \\ \frac{a + bi}{c + di} &= \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} \\ &= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i \end{aligned}$$

特に、 $c + di$ の逆数は、

$$\frac{1}{c + di} = \frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{d}{c^2 + d^2}i$$

である。

演習問題 3.1 次の計算をせよ。

(1) $(3 + 5i) + (4 - 7i)$

(2) $(2 + 3i)(3 - 4i)$

(3) $\frac{5 + 3i}{1 + 2i}$

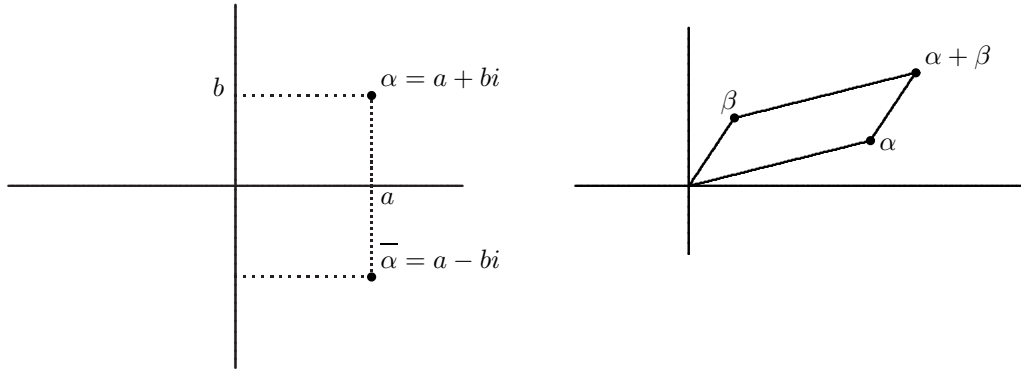
(4) $\frac{1}{5 - 2i}$

3.2 複素平面

実数の集合は、数直線で幾何学的に表せる。同様に、複素数は2つの実数の組で決まるから、平面上の点で表すことが出来る。すなわち、 $\alpha = a + bi$ とすると

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \alpha &\longmapsto (a, b). \end{aligned}$$

なる写像は全単射であり，複素数全体の集合 \mathbb{C} と平面 \mathbb{R}^2 が同一視出来る。



この平面を複素平面またはガウス平面と呼び， x 軸， y 軸をそれぞれ実軸，虚軸と呼ぶ。複素数の演算において複素数 $\alpha = a + bi$ ， $\beta = c + di$ の和を定めたが， \mathbb{C} と \mathbb{R}^2 の同一視を通して α, β を平面のベクトル (a, b) ， (c, d) と思う事により，複素数の和 $\alpha + \beta$ は，ベクトルとしての和 $\alpha + \beta = (a + c, b + d)$ と幾何学的に解釈できる。

複素共役 複素数 $\alpha = a + bi$ に対して，

$$\bar{\alpha} = a - bi$$

を α の複素共役と呼ぶ。 $\alpha, \bar{\alpha}$ を用いれば，複素数 α の実部，虚部は次のように表せる：

$$\operatorname{Re}(\alpha) = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2}, \quad \operatorname{Im}(\alpha) = \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2i}$$

複素平面で考えると，実軸 (x 軸) に関して対称移動した点に対応するのが共役複素数である。複素数の共役に対して，次が成り立つ：

命題 3.2 複素数 α ， α_1 ， α_2 に対して，

$$(1) \overline{\bar{\alpha}} = \alpha \quad (2) \overline{(\alpha_1 + \alpha_2)} = \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 \quad (3) \overline{\alpha_1 \cdot \alpha_2} = \bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha}_2 \quad (4) \overline{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)} = \frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{\alpha}_2}$$

が成り立つ。

ここでは (2) のみ証明し後は演習問題とする。 $\alpha_1 = a + bi, \alpha_2 = c + di$ とおくと $\bar{\alpha}_1 = a - bi, \bar{\alpha}_2 = c - di$ である。 $\alpha_1 + \alpha_2 = (a + c) + (b + d)i$ なので $\overline{\alpha_1 + \alpha_2} = (a + c) - (b + d)i$ となる。よって

$$\begin{aligned} \overline{\alpha_1 + \alpha_2} &= (a + c) - (b + d)i \\ &= (a - bi) + (c - di) \\ &= \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 \end{aligned}$$

が成立する。

演習問題 3.2 命題 3.2 を証明せよ。

絶対値 複素数 $\alpha = a + bi$ に対して、

$$\alpha \cdot \bar{\alpha} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \geq 0$$

であるから、平方根がとれ、それを α の絶対値と呼ぶ：

$$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad |\alpha|^2 = \alpha \bar{\alpha}$$

複素平面において、原点 O から $\alpha = a + bi$ までの距離を r とおくと、ピタゴラスの定理より

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |\alpha|$$

が成り立つ。すなわち、複素数 α の絶対値は、幾何学的にはベクトル α の長さを表している。また、2点 $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$ の距離は、 $\alpha - \beta$ の絶対値で与えられる。すなわち

$$|\alpha - \beta| = \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}$$

が成立する (図 3.1 参照)。

演習問題 3.3 次の問いに答えよ。

- (1) $\alpha = 0 \iff |\alpha| = 0$ を証明せよ。
- (2) $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha||\beta|$ を示せ。

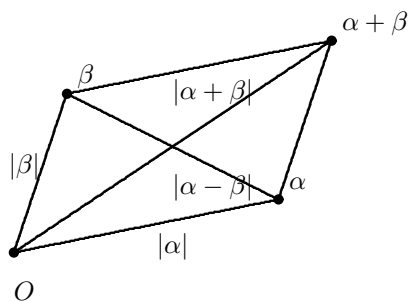


図 3.1

さて、2点間の距離に関して次の定理が成り立つ：

定理 3.3 [三角不等式] 複素数 α, β に対して、次の不等式が成り立つ：

- (1) $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$
- (2) $|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha - \beta|$

演習問題 3.4 図 3.1 を参考にして定理 3.3 を証明せよ。