

#### 4.4 対数関数

$a \neq 1$  を正の実数として  $f(x) = a^x$  を指数関数とする。指数関数の性質のところでも述べたように、 $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  は単調増加か単調減少であるので単射である。また、 $a > 1$  のときは  $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$  であり、 $0 < a < 1$  のときは  $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$  となり、 $(0, \infty)$  の全ての値をとるので全射である。よって、全単射である。

従って、逆関数  $f^{-1}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  が存在する。この関数を  $\log_a x$  と書き、 $a$  を底とする対数関数という。

$$y = a^x \iff x = \log_a y$$

指数法則より、次が成り立つ。

**命題 4.14 (1)**  $\log_a 1 = 0$ ,  $\log_a a = 1$  が成り立つ。

**(2)** 任意の正の実数  $p, q$  に対して次が成り立つ。

$$\log_a pq = \log_a p + \log_a q$$

**(3)** 任意の正の実数  $p$  と任意の実数  $c$  に対して次が成り立つ。

$$\log_a p^c = c \log_a p$$

**(4) (底の変換)** 1 ではない任意の正の実数  $a, b$  と任意の正の実数  $p$  に対して次が成り立つ。

$$\log_a p = \frac{\log_b p}{\log_b a}$$

**証明 (1)**  $a^0 = 1$  より、対数の定義を用いると  $0 = \log_a 1$  となる。 $a^1 = a$  より  $1 = \log_a a$  となる。

**(2)**  $a^x$  という関数は任意の正の実数とその値として持つから、任意の正の実数  $p, q$  に対してある実数  $s, t$  があって  $p = a^s, q = a^t$  となる。指数法則から、 $r = a^{s+t}$  とおくと、 $r = a^{s+t} = a^s a^t = pq$  である。また、対数関数の定義から、 $s = \log_a p, t = \log_a q, s + t = \log_a r = \log_a pq$  であるから、 $\log_a r = \log_a pq = \log_a p + \log_a q$  となる。

**(3)**  $p = a^s$  とする。指数法則から  $p^c = (a^s)^c = a^{cs}$  であるから、 $\log_a p^c = cs = c \log_a p$  が成り立つ。

**(4)**  $b^u = p, b^v = a$  とすると  $\log_b p = u, \log_b a = v$  である。

$$p = b^u = b^{\frac{u}{v} \cdot v} = (b^v)^{\frac{u}{v}} = a^{\frac{u}{v}}$$

であるから、

$$\log_a p = \frac{u}{v} = \frac{\log_b p}{\log_b a}$$

となる。■

この命題から次がわかる。

系 4.15 (1)  $\log_a \frac{1}{p} = -\log_a p$ .

(2)  $\log_a \frac{p}{q} = \log_a p - \log_a q$

このように対数は、積の計算が和の計算に置き換わる、という画期的な性質を持っている。計算機などはなく、全てを手計算で行っていた時代では、これによる恩恵は、計り知れないものがある。対数は、スコットランドのジョン・ネイピア (1550–1617) とスイスのヨブスト・ビュルギ (1552–1652) によって同じ頃に発見されたと言われているが、世に知られて、広く使われるようになったのは、ネイピアによる著作「対数の驚くべき規則の叙述」(1614年) と「対数の驚くべき規則の構成」(1619) による。これらの本の中には、ネイピアが 20 年かけて計算した詳細な対数表が含まれており (もちろん全て手計算であるにもかかわらず、ほとんど誤りがなかった)、その後のあらゆる分野における数値計算の労力を劇的に軽減した。その意味でネイピアは、その後の科学技術の発展に多大な貢献をなしたと言える。(実際にはその後、ヘンリー・ブリッグズ、アドリアン・ヴラックらがネイピアとの議論に基づいて対数表を改良し、より詳細な表を作って 1628 年に発表した。その対数表は 20 世紀に至るまで、ほとんど全ての対数表の基礎となった。)

また、数を小数を用いて表すという、現在普通につかわれている表記方法は、ネイピアによって考え出され、上記の本で初めて現れた (小数の基本的な考え方やある種の表記方法は以前からあったが、普及していなかった)。当時も精密な計算は 7~8 桁の精度で行われていたが、例えば  $12.345678$  は  $12 \frac{345678}{1000000}$  などと書かれていた。

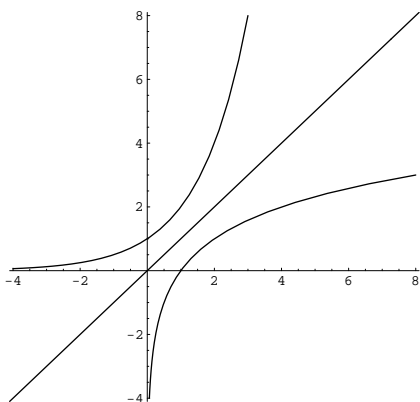
ちなみに、自然対数の底  $e$  を **ネイピアの定数** というが、実際、彼が最初に考えた対数は、 $e$  という数を意識はしていなかったが、基本的には自然対数であった。その後、より計算に便利な、10 を底とする常用対数を提案するようになる。

#### 演習問題 4.7

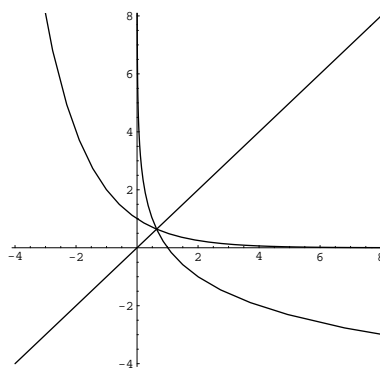
(1)  $a, b, c$  を正の実数とする。  $a^b = c^{b \log_c a}$  を示せ。

(2)  $a, b, c$  を正の実数とする。  $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$  を示せ。

**対数関数のグラフ** 対数関数は指数関数の逆関数なので、そのグラフは、対応する指数関数のグラフを  $y = x$  に関して対称に写せばよい。



$y = 2^x$  と  $y = \log_2 x$  のグラフ



$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  と  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$  のグラフ

## 4.5 逆三角関数

三角関数  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$  の逆関数を考えてみよう。逆関数は、全単射になっていなければ定義できないが、 $\sin x$ ,  $\cos x$  は実数全体で定義された関数と見なすと単射ではない。そこで、逆関数を考えるためには、定義域を限定して、全単射になるような部分だけを取り出す必要がある。

$\sin x$  や  $\cos x$  がその上で全単射になるような区間は無数にあり、そのうちのどれを採用したとしても、そこに限定した  $\sin x$  や  $\cos x$  は、当然、逆関数を持つ。そのような区間として、最も「標準的な」ものとしては、次のようなものが考えられる。

$f(x) = \sin x$  とする。この関数の定義域を  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  に制限した関数  $f$  (名前を変更する必要があるかもしれないが、ここでは混同して用いる) を

$$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$$

とすると、 $f$  は全単射になる。従って、逆関数

$$f^{-1}: [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

が存在する。これを  $\arcsin x$  と書く (**アークサイン** と読む)。 $\sin^{-1} x$  という記法も用いられるが、誤解を生みやすい記号なのでこの講義では採用しないことにする。

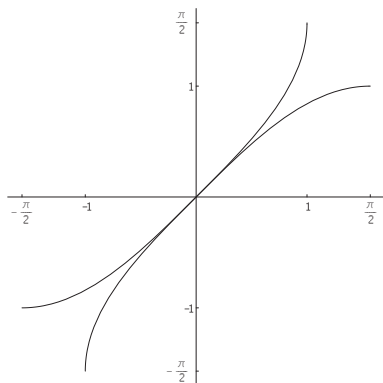


図 4.5:  $\sin x$  と  $\arcsin x$

$g(x) = \cos x$  とする。この関数の定義域を  $[0, \pi]$  に制限した関数  $g$  (名前を変更する必要があるかもしれないが、ここでは混同して用いる) を

$$g: [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$

とすると、 $g$  は全単射になる。従って、逆関数

$$g^{-1}: [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

が存在する。これを  $\arccos x$  と書く (**アークコサイン** と読む)。 $\cos^{-1} x$  という記法も用いられるが、誤解を生みやすい記号なのでこの講義では採用しないことにする。

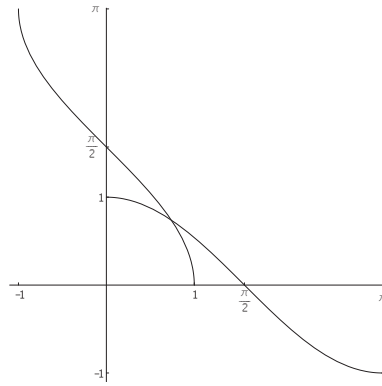


図 4.6:  $\cos x$  と  $\arccos x$

$\tan x$  は  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  から  $\mathbb{R}$  への全単射であるから、 $\mathbb{R}$  から  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  への逆関数が存在する。これを  $\arctan x$  などと書き、**アークタンジェント**  $x$  と読む。 $\tan^{-1} x$  という記法も用いられるが、誤解を生みやすい記号なのでこの講義では採用しないことにする。

$\arctan x$  は実数全体で定義された関数なので、 $\frac{\pi}{2} + n\pi$  という点で値が定義されない  $\tan x$  と比べると、どちらかと言うと、より「まともな」関数である、という見方もできる。

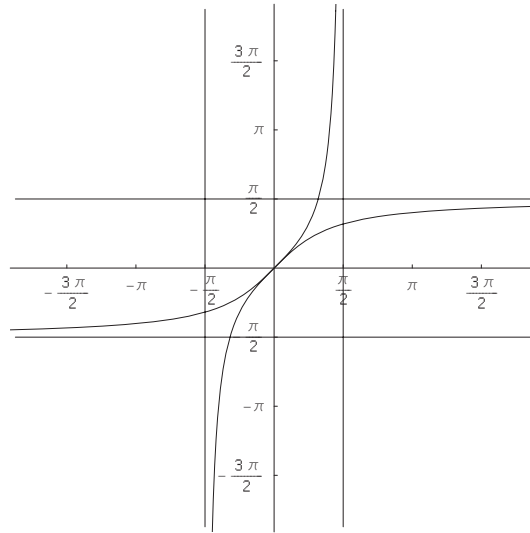


図 4.7:  $\tan x$  と  $\arctan x$  のグラフ

#### 演習問題 4.8

(1) 次の値を求めよ。

$$\arcsin \frac{1}{2}, \quad \arccos \frac{1}{2}, \quad \arctan 1, \quad \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \arctan \sqrt{3}, \quad \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(2)  $-1 \leq x \leq 1$  の時、 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$  を示せ。

(3)  $x > 0$  の時、 $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$  を示せ。

(4)  $\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  を示せ。

## 4.6 双曲線関数

講義では省略したが、双曲線のパラメータ表示には次に紹介する双曲線関数が用いられる。積分でも使用する場合がありますので関数を紹介しておく。パラメータ表示について一言だけふれておくと、 $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$  は楕円の標準形ともいえる「円」

$$x^2 + y^2 = 1$$

のパラメータ表示を与えるのに対し、ここで定義する頂曲線関数は双曲線の標準形ともいえる「直角双曲線」

$$x^2 - y^2 = 1$$

のパラメータ表示を与える。

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

を双曲線関数という。cosh はハイパボリック・コサイン などと読む<sup>(1)</sup>。

**演習問題 4.9** 次を示せ。

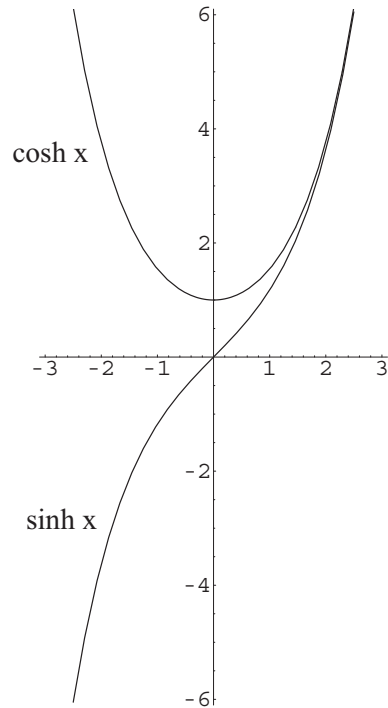
- (1)  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- (2)  $\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$
- (3)  $\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b$

明らかに  $\cosh x$  は偶関数であり、そのグラフは  $y$  軸に対して対称となるが、さらに  $[0, \infty)$  では単調増加となっている (微分してみるとわかる)。従って、 $\cosh x$  は  $[0, \infty)$  に制限すると、 $[0, \infty)$  から  $[1, \infty)$  への全単射を与える。

また、 $\sinh x$  は奇関数であり、そのグラフは原点に関して点対称である。 $\sinh x$  は  $\mathbb{R}$  全体で単調増加であり (微分してみるとわかる)、実数全ての値をとるので、 $\mathbb{R}$  からそれ自身への全単射を与える。

---

<sup>(1)</sup>  $\cosh x$  を  $\cos(hx)$  だと勘違いするものがあるが、括弧を用いて表すと  $\cosh(x)$  であることに注意。



演習問題 4.10

(1)  $\cosh x$  を  $[0, \infty)$  に制限した関数の逆関数を  $\cosh^{-1} x$  とする。これは  $[1, \infty)$  から  $[0, \infty)$  への関数である。

$$\cosh^{-1} x = \log \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$$

であることを示せ。

(2)  $\sinh x$  の逆関数を  $\sinh^{-1} x$  とする。これは  $\mathbb{R}$  全体で定義された関数である。

$$\sinh^{-1} x = \log \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

であることを示せ。

(3)  $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$  とする。任意の  $x$  に対して  $|\tanh x| < 1$  を示せ。

(4)  $\tanh x$  は単調増加関数であることを (微分を使わずに) 示せ。

$x \rightarrow -\infty$  のとき  $\tanh x \rightarrow -1$  であり,  $x \rightarrow \infty$  のとき  $\tanh x \rightarrow 1$  であることがわかるので,  $\tanh x$  は  $\mathbb{R}$  から  $(-1, 1)$  への全単射を与える。従って, その逆写像  $\tanh^{-1} x$  は,  $(-1, 1)$  上で定義され,  $\mathbb{R}$  全体の値をとる単調増加関数となる。

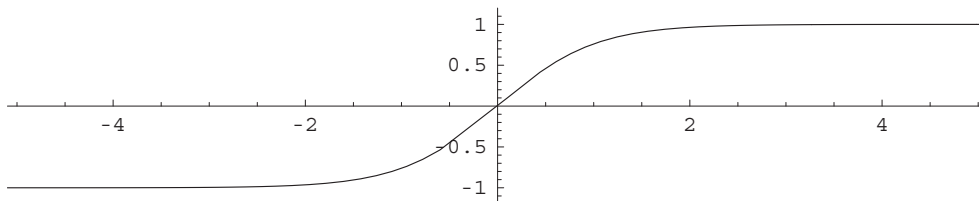


図 4.8:  $\tanh x$  のグラフ