

5.5 接線と法線の方程式

$y = f(x)$ という関数のグラフを考える. $x = a$ における値を $b = f(a)$ とすると, このグラフは平面上の (a, b) という点を通る.

この点を通り, このグラフに接している直線の方程式を求めてみよう. このような直線を, この点における関数 $y = f(x)$ の接線という. この直線は点 (a, b) を通り, 傾きが $f'(a)$ であるので, その方程式は

$$y = f'(a)(x - a) + b$$

となる. 書き換えると,

$$f'(a)x - y - (f'(a)a - b) = 0$$

となる.

$y = f(x)$ のグラフ上の点 $(a, f(a)) = (a, b)$ を通り, このグラフの接線に直交する直線の方程式を求めてみよう. このような直線を, この点における関数 $y = f(x)$ の法線という.

この直線は点 (a, b) を通り, 傾きが $-\frac{1}{f'(a)}$ であるので, その方程式は

$$y = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) + b$$

となる. このような表示では, 当然 $f'(a) \neq 0$ でなければならない. しかし, 両辺に $f'(a)$ をかけることにより,

$$x + f'(a)y - (a + f'(a)b) = 0$$

となる. この表示の場合は $f'(a) = 0$ でも問題はない. そのときは方程式は $x - a = 0$ となる.

演習問題 5.19

- (1) $f(x) = x^2 + x + 1$ とする. $(1, 3)$ における f のグラフの接線と法線の方程式を求めよ.
- (2) $f(x) = x(x-1)(x-2)$ のグラフに接し, $y = 2x + 1$ と平行な直線の方程式を求めよ.
- (3) 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ 上に相異なる 2 点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ をとったとする. この放物線の接線で, 線分 PQ に平行となるのは, どの点における接線か? その点の x 座標の値を求めよ.

5.6 増減表と関数のグラフ

定義 5.17 (1) f を微分可能関数とする. $f'(c) = 0$ となる点 c を f の臨界点という.

- (2) c は, その近くの任意の x に対して $f(x) < f(c)$ となるとき 極大点 という⁽¹⁾.
- (3) c は, その近くの任意の x に対して $f(x) > f(c)$ となるとき 極小点 という.

⁽¹⁾ 「任意と存在」を用いて数学的に厳密に述べると「ある正の数 δ が存在して, 任意の実数 x に対し $0 < |x - c| < \delta \implies f(x) < f(c)$ 」である.

演習問題 5.20 極大点, 極小点は臨界点であることを証明せよ。

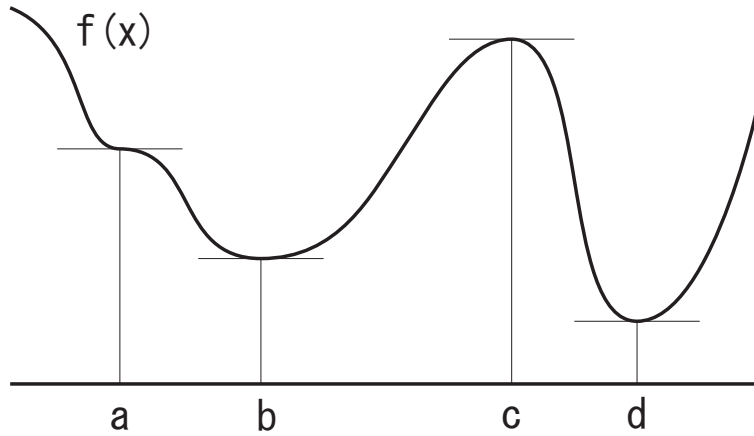
臨界点 c に対して, 「 $f''(c) \neq 0$ ならば c は極大点か極小点である」ということを「解析学1」で示す。従って, この命題の対偶をとると,

「臨界点が極大か極小ではないなら $f''(c) = 0$ である。」

ということがわかる。

(注意: グラフの凹凸が変化する点を変曲点という。 $f''(c) = 0$ であって $f'''(c) \neq 0$ ならば, 臨界点であってもなくても, それは変曲点になる。)

臨界点を求め, それらで挟まれる区間における導関数の値の正負を調べることにより, 関数のグラフの概形を描くことができる。導関数の値や関数値の増減を一覧表にしたものを, その関数の増減表 という。



x		a		b		c		d	
$f'(x)$	-	0	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\searrow	$f(a)$	\searrow	$f(b)$	\nearrow	$f(c)$	\searrow	$f(d)$	\nearrow

例 5.18 $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ のグラフの概形を描く。

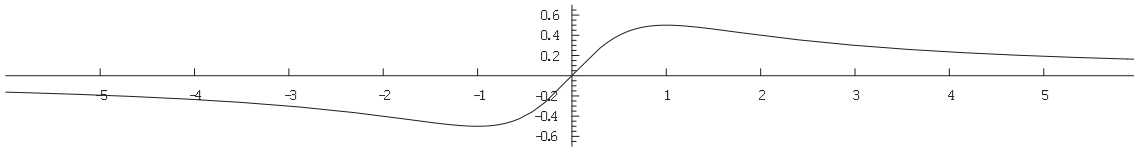
$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{x'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\
 &= \frac{(x^2+1) - 2x^2}{(x^2+1)^2} \\
 &= \frac{-(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}
 \end{aligned}$$

であるから, 臨界点は $x = \pm 1$ である。 $f(-1) = -\frac{1}{2}$, $f(1) = \frac{1}{2}$ より, 増減表を作ると,

x		-1		1	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\searrow	$-\frac{1}{2}$	\nearrow	$\frac{1}{2}$	\searrow

となり、 -1 は極小点、 1 は極大点であることがわかる。

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ に注意すると、グラフの概形は次のようになることがわかる。



演習問題 5.21 以下の関数のグラフの概形を描け。

- (1) $f(x) = 2x^2 - x^4$ (2) $f(x) = xe^{-x}$ (3) $f(x) = x^2 \log x$
- (4) $f(x) = 3 \sin x + \sin 3x$ (5) $f(x) = x - \sqrt{1+x}$ (6) $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$
- (7) $f(x) = x + 2 \cos x$ (8) $f(x) = \sin x(1 + \cos x)$ (9) $f(x) = x^{-x^2}$

関数のグラフの凹凸を調べることで、もう少し正確に概形を描くことができる。関数 $y = f(x)$ がある区間 $[a, b]$ で下に凸であるとは次で定義される；任意の $x_1, x_2 \in [a, b]$ に対し、 $(x_1, f(x_1))$ と $(x_2, f(x_2))$ を結ぶ線分の下に関数 $y = f(x)$ ($x_1 < x < x_2$) のグラフがある。式で書くと $x_1 < x < x_2$ に対し

$$f(x) < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)$$

が成立している。関数 $y = f(x)$ がある区間 $[a, b]$ で上に凸であるとは次で定義される；任意の $x_1, x_2 \in [a, b]$ に対し、 $(x_1, f(x_1))$ と $(x_2, f(x_2))$ を結ぶ線分の上に関数 $y = f(x)$ ($x_1 < x < x_2$) のグラフがある。式で書くと $x_1 < x < x_2$ に対し

$$f(x) > \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)$$

が成立している。

次の命題を用いてグラフの凹凸を判断することができる。

命題 5.19 関数 $y = f(x)$ が (a, b) において $f''(x) > 0$ とすると、この区間で関数のグラフは下に凸である。 (a, b) において $f''(x) < 0$ とすると、この区間で関数のグラフは上に凸である。

演習問題 *5.22 $x_1, x_2 \in [a, b]$ に対し $F(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1) - f(x)$ とおき、 $F(x)$ の正負を調べることにより命題 5.19 を証明せよ。

演習問題 5.23 次の関数のグラフの凹凸を調べ概形を描け。

- (1) $y = (x - 5)^4(x + 1)^3$ (2) $y = \frac{x^2 + 1}{x}$
- (3) $y = e^{-x^2}$ (4) $y = x \log x$

パラメータ表示された曲線の概形

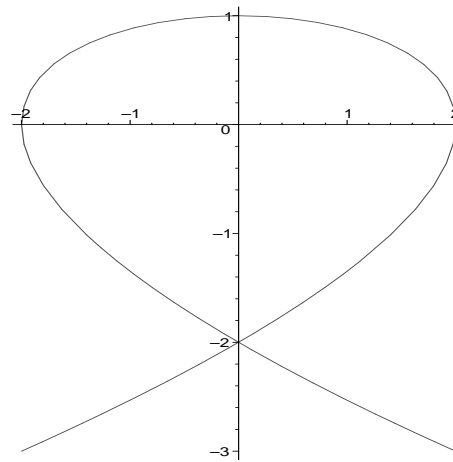
パラメータ表示された曲線の概形を書くというのも大切である。 $(x(t), y(t))$ とパラメータ表示されている場合、関数 $x(t), y(t)$ の概形が分かれば、それを組み合わせることにより書くことができる。

$x = x(t) = 3t - t^3, y = y(t) = 1 - t^2$ でパラメータ表示された曲線の概形を書こう。

$x' = 3 - 3t^2$ より $t = \pm 1$ において $x' = 0$ となる。 $y' = -2t$ より $t = 0$ において $y' = 0$ となる。よって増減表は以下の様になる。

t		-1		0		1	
x'	-	0	+	+	+	0	-
x	←		→	→	→		←
y'	+	+	+	0	-	-	-
y	↑	↑	↑		↓	↓	↓
曲線	↖	↑	↗	→	↘	↓	↙

$x = 0$ となるのは $t = 0, \pm\sqrt{3}$, $y = 0$ となるのは $t = \pm 1$ である。即ちこの曲線は x 軸と $(2, 0), (-2, 0)$ で交わり、 y 軸とは $(0, 1), (0, -2)$ で交わる。このことに注意して概形を描くと次の様になる。



演習問題 5.24 次のようにパラメータ表示された曲線の概形を書け。

- (1) $x = x(t) = t^4 - t^2, y = y(t) = t^3 - t$
- (2) $x = x(t) = t - t^3, y = y(t) = 1 - t^4$
- (3) $x = x(t) = t^2 - t^3, y = y(t) = t - 2t^4$
- (4) $x = x(t) = t - t^3, y = y(t) = 1 - t^2 - t^4$

5.7 不定形の極限とロピタルの定理

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ という形の極限を考えると、 $f(a) = g(a) = 0$ あるいは、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ かつ

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ となる場合、これを **不定形の極限** という。

不定形の極限を求める場合、次の定理が便利である。

定理 5.20 [L'Hôpital の定理] f, g は a の周りで微分可能とする。 $f(a) = g(a) = 0$ あるいは、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ かつ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ となるとき、 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ も存在して、両者の値は一致する。ここで a は $\pm\infty$ でもよい。

証明 a がある実数であって $f(a) = g(a) = 0$ の場合について「証明」⁽¹⁾する。その他の場合の証明は、ちょっとやっかいな場合もあるのでここでは述べない。 $x = a + h$ とおくと、 $x \rightarrow a$ のとき $h \rightarrow 0$ となっている。 $f(a) = g(a) = 0$ に注意すると

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{g(a+h) - g(a)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \frac{h}{g(a+h) - g(a)} \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{g(a+h) - g(a)} \\ &= \frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{aligned}$$

となり成立している。 ■

例 5.21

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (1)$$

を求める (この極限はすでに演習問題で扱っているが、ここではロピタルの定理を用いて求める)。 $x = 0$ のとき、分母と分子は共に 0 となるので、これは不定形の極限である。分母と分子の関数の導関数で見ると、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} \quad (2)$$

となって、やはり不定形の極限である。さらに、これの分母と分子の関数の導関数で見ると、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2}$$

となり、これは不定形の極限ではなく、極限值 $1/2$ を持つ。そうすると、L'Hôpital の定理より、(2) も同じ値に収束することがわかる。そうすると再び L'Hôpital の定理より、(1) も $1/2$ に収束することが示される。

演習問題 5.25 以下の極限值を求めよ。

$$\begin{array}{lll} (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} & (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\log(1+x)} & (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos(\alpha x)}{\log \cos(\beta x)} \\ (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0) & (5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{e^x} & (6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1+3^x)}{x} \\ (7) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right) & (8) \lim_{x \rightarrow 0} x \log x & (9) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} \\ (10) \lim_{x \rightarrow +0} x^x & (11) \lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{1}{x}} & (12) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} \end{array}$$

⁽¹⁾この「証明」は厳密さに欠ける所がある。きちんとした証明は解析学 I で述べることにする。