

演習問題 1.12 次の命題を数学的帰納法により証明せよ。ただし n は自然数とする。(5) においては積の導関数の公式 $[(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]$ を使用してよい。

$$(1) 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(2) 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

(3) $n(n^2 + 2)$ は 3 で割り切れる。

(4) $h \geq 0$ のとき $(1+h)^n \geq 1+nh$ である。

(5) $y = x^n$ の導関数は $y' = nx^{n-1}$ である。

(1) 命題を $P(n)$ とおく。

(A) $\frac{1(1+1)(2 \cdot 1+1)}{6} = 1 = 1^2$ なので $P(1)$ は成立している。

(B) $P(k)$ の成立を仮定する。即ち $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ の成立を仮定する。この両辺に $(k+1)^2$ を加えると、

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= (k+1) \left(\frac{k(2k+1)}{6} + k+1 \right) \\ &= (k+1) \frac{2k^2 + k + 6k + 6}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ &= \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6} \end{aligned}$$

となる。よって $P(k+1)$ も成立している。数学的帰納法によりすべての自然数 n に対し $P(n)$ が成立する。

(2) 命題を $P(n)$ とおく。

(A) $\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1 = 1^3$ なので $P(1)$ は成立している。

(B) $P(k)$ の成立を仮定する。即ち $1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$ の成立を仮定する。この両辺に $(k+1)^3$ を加えると、

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 &= \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 \\ &= (k+1)^2 \left(\frac{k^2}{4} + k+1\right) \\ &= (k+1)^2 \frac{k^2 + 4k + 4}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\
&= \left(\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} \right)^2
\end{aligned}$$

となる。よって $P(k+1)$ も成立している。数学的帰納法によりすべての自然数 n に対し $P(n)$ が成立する。

(3) 命題を $P(n)$ とおく。

(A) $1(1^2+2)=3$ であり、3は3で割り切れるので $P(1)$ は成立している。

(B) $P(k)$ の成立を仮定する。このとき $k(k^2+2)$ は3で割り切れる。すなわちある整数 N が存在して $k(k^2+2)=3N$ と書くことができる。

$$\begin{aligned}
(k+1)((k+1)^2+2) &= (k+1)(k^2+2k+3) = k^3+3k^2+5k+3 \\
&= k(k^2+2)+3k^2+3k+3 \\
&= k(k^2+2)+3(k^2+k+1) \\
&= 3(N+k^2+k+1)
\end{aligned}$$

よって $(k+1)((k+1)^2+2)$ も3で割り切れるので $P(k+1)$ も成立している。数学的帰納法によりすべての自然数 n に対し $P(n)$ が成立する。

(4) 命題を $P(n)$ とおく。

(A) $P(1)$ は $(1+h)^1 \geq 1+1 \cdot h$ なので成立している。

(B) $P(k)$ の成立を仮定する。すなわち $(1+h)^k \geq 1+kh$ の成立を仮定する。

$$\begin{aligned}
(1+h)^{k+1} &= (1+h)^k(1+h) \geq (1+kh)(1+h) \\
&= 1+(k+1)h+kh^2 \geq 1+(k+1)h
\end{aligned}$$

となる。よって $P(k+1)$ も成立している。数学的帰納法によりすべての自然数 n に対し $P(n)$ が成立する。

(5) 命題を $P(n)$ とおく。

(A)

$$\begin{aligned}
(x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1
\end{aligned}$$

なので $(x^1)' = 1 = 1x^0 = 1x^{1-1}$ となり $P(1)$ は成立している。

(B) $P(k)$ の成立を仮定する。すなわち $(x^k)' = kx^{k-1}$ の成立を仮定する。このとき

$$\begin{aligned}
(x^{k+1})' &= (x^k x)' = (x^k)' x + x^k (x)' = kx^{k-1} x + x^k \cdot 1 \\
&= kx^k + x^k = (k+1)x^k = (k+1)x^{(k+1)-1}
\end{aligned}$$

となるので、 $P(k+1)$ も成立している。数学的帰納法によりすべての自然数 n に対し $P(n)$ が成立する。

演習問題 1.13 次の命題を数学的帰納法により証明せよ。ただし n は自然数とする。

(1) 漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ を満たし、 $a_1 = p$, $a_2 = q$ を満たす数列は

$$a_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}$$

であることを示せ。ただし $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $A = \frac{q-p\beta}{\alpha-\beta}$, $B = \frac{p\alpha-q}{\alpha-\beta}$ とする。

(2) 漸化式 $a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n$ を満たし、 $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_3 = 14$ を満たす数列は

$$a_n = 1 + 2^{n-1} + 3^{n-1}$$

であることを示せ。

(1) $a_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}$ が成立するという命題を $P(n)$ とする。

(A)

$$\begin{aligned} A\alpha^{1-1} + B\beta^{1-1} &= A + B = \frac{q-p\beta}{\alpha-\beta} + \frac{p\alpha-q}{\alpha-\beta} \\ &= \frac{p(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta} = p = a_1 \end{aligned}$$

なので $P(1)$ は成立している。

(B)

$$\begin{aligned} A\alpha^{2-1} + B\beta^{2-1} &= A\alpha + B\beta = \frac{q-p\beta}{\alpha-\beta}\alpha + \frac{p\alpha-q}{\alpha-\beta}\beta \\ &= \frac{q\alpha - p\beta\alpha + p\alpha\beta - q\beta}{\alpha-\beta} = \frac{q(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta} \\ &= q = a_2 \end{aligned}$$

なので $P(2)$ は成立している。

(C) $P(k)$ および $P(k+1)$ の成立を仮定する。

$$\begin{aligned} a_{k+2} &= a_{k+1} + a_k = A\alpha^k + B\beta^k + A\alpha^{k-1} + B\beta^{k-1} \\ &= A(\alpha^k + \alpha^{k-1}) + B(\beta^k + \beta^{k-1}) \\ &= A\alpha^{k-1}(\alpha + 1) + B\beta^{k-1}(\beta + 1) \end{aligned}$$

が成立する。ここで α, β は $\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = -1$ を満たすので $x^2 - x - 1 = 0$ の 2 解である。よって $\alpha^2 = \alpha + 1$, $\beta^2 = \beta + 1$ が成立する。ここでは 2 次方程式の解と係数の関係を用いたが直接計算してもよい。よって上式は $A\alpha^{(k+2)-1} + B\beta^{(k+2)-1}$ となり $P(k+2)$ の成立が示される。数学的帰納法によりすべての自然数 n に対し $P(n)$ が成立する。

(2) $a_n = 1 + 2^{n-1} + 3^{n-1}$ が成立するという命題を $P(n)$ とする。

(A)

$$1 + 2^{1-1} + 3^{1-1} = 1 + 1 + 1 = 3 = a_1$$

なので $P(1)$ は成立している。

(B)

$$1 + 2^{2-1} + 3^{2-1} = 1 + 2 + 3 = 6 = a_2$$

なので $P(2)$ は成立している。

(C)

$$1 + 2^{3-1} + 3^{3-1} = 1 + 4 + 9 = 14 = a_3$$

なので $P(3)$ は成立している。

(C) $P(k)$ および $P(k+1)$, $P(k+2)$ の成立を仮定する。このとき

$$\begin{aligned} a_{k+3} &= 6a_{k+2} - 11a_{k+1} + 6a_k \\ &= 6(1 + 2^{k+1} + 3^{k+1}) - 11(1 + 2^k + 3^k) + 6(1 + 2^{k-1} + 3^{k-1}) \\ &= 6 - 11 + 6 + (6 \cdot 2^2 - 11 \cdot 2 + 6)2^{k-1} + (6 \cdot 3^2 - 11 \cdot 3 + 6)3^{k-1} \\ &= 1 + 8 \cdot 2^{k-1} + 27 \cdot 3^{k-1} = 1 + 2^3 \cdot 2^{k-1} + 3^3 \cdot 3^{k-1} \\ &= 1 + 2^{k+2} + 3^{k+2} = 1 + 2^{(k+3)-1} + 3^{(k+3)-1} \end{aligned}$$

となるので $P(k+3)$ も成立している。数学的帰納法によりすべての自然数 n に対し $P(n)$ が成立する。