

**演習問題 2.8**  $A = \{1, 2\}$  とする。定義域および終域がともに  $A$  である写像をすべて列挙せよ。その中で単射であるものをすべて挙げよ。また全射であるものをすべて挙げよ。

$A$  から  $A$  への写像  $f_1$  を  $f_1(1) = 1, f_1(2) = 1$  で定義する。以下同様に  $f_2(1) = 1, f_2(2) = 2, f_3(1) = 2, f_3(2) = 1, f_4(1) = 2, f_4(2) = 2$  として  $f_2, f_3, f_4$  を定義する。この 4 つが  $A$  から  $A$  への写像のすべてである。

ここで単射、全射の否定命題も述べておく。写像  $f: A \rightarrow B$  が単射であることの定義は

$$\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)$$

だったので、否定は

$$\exists a_1, a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2 \wedge f(a_1) = f(a_2)$$

である。写像  $f: A \rightarrow B$  が全射であることの定義は  $f(A) = B$  であるが、実際は  $f(A) \supseteq B$  が成立すればよいので

$$\forall b \in B \exists a \in A \quad b = f(a)$$

だったので、否定は

$$\exists b \in B \forall a \in A \quad b \neq f(a)$$

である。

$f_1$  は  $b = 2$  とすると、任意の  $a \in A$  に対し  $f_1(a) = 1 \neq b (= 2)$  が成立するので全射ではない。 $f_4$  は  $b = 1$  とすると、任意の  $a \in A$  に対し  $f_4(a) = 2 \neq b (= 1)$  が成立するので全射ではない。

$f_1$  は  $1 \neq 2$  かつ  $f_1(1) = f_1(2)$  が成立するので単射ではない。 $f_4$  は  $1 \neq 2$  かつ  $f_4(1) = f_4(2)$  が成立するので単射ではない。

残りの  $f_2$  及び  $f_3$  は全単射である。最初に  $f_2$  に関して示す。 $A$ (終域の方) から任意に元  $b$  をとってくる。このとき  $b = 1$  または  $b = 2$  である。 $b = 1$  の場合は  $a = 1$  とおくと  $f_2(a) = b$  が成立している。 $b = 2$  の場合は  $a = 2$  とおくと  $f_2(a) = b$  が成立している。いずれの場合も  $f_2(a) = b$  となる元  $a$  が存在するので全射である。

任意の  $a_1, a_2 \in A$  に対し  $a_1 \neq a_2$  とすると、 $a_1, a_2$  の可能性は  $(a_1, a_2) = (1, 2)$  または  $(a_1, a_2) = (2, 1)$  である。いずれの場合も  $f_2(a_1) \neq f_2(a_2)$  となるので  $f_2$  は単射である。

次は  $f_3$  について示す。 $A$ (終域の方) から任意に元  $b$  をとってくる。このとき  $b = 1$  または  $b = 2$  である。 $b = 1$  の場合は  $a = 2$  とおくと  $f_3(a) = b$  が成立している。 $b = 2$  の場合は  $a = 1$  とおくと  $f_3(a) = b$  が成立している。いずれの場合も  $f_3(a) = b$  となる元  $a$  が存在するので全射である。

任意の  $a_1, a_2 \in A$  に対し  $a_1 \neq a_2$  とすると、 $a_1, a_2$  の可能性は  $(a_1, a_2) = (1, 2)$  または  $(a_1, a_2) = (2, 1)$  である。いずれの場合も  $f_3(a_1) \neq f_3(a_2)$  となるので  $f_3$  は単射である。

**演習問題 2.9**  $A = \{1, 2, 3\}$  とする。定義域および終域がともに  $A$  である写像で単射であるものをすべて列挙せよ。また全射であるものをすべて列挙せよ。

ここでは結果のみを書く。理解があやふやだと思うものは、前問を参考に証明をつけてみよ。

$$f_1(1) = 1, \quad f_1(2) = 2, \quad f_1(3) = 3$$

として  $f_1$  を定義する。以下

$$f_2(1) = 1, \quad f_2(2) = 3, \quad f_2(3) = 2$$

$$f_3(1) = 2, \quad f_3(2) = 1, \quad f_3(3) = 3$$

$$f_4(1) = 2, \quad f_4(2) = 3, \quad f_4(3) = 1$$

$$f_5(1) = 3, \quad f_5(2) = 1, \quad f_5(3) = 2$$

$$f_6(1) = 3, \quad f_6(2) = 2, \quad f_6(3) = 1$$

で  $f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$  を定義する。これらが全単射であり、他の関数は全射でも単射でもない。

**演習問題 \*2.10**  $\mathbb{N}$  から  $\mathbb{N}$  への写像で全射であるが、単射でないものをあげよ。また  $\mathbb{N}$  から  $\mathbb{N}$  への写像で単射であるが、全射でないものをあげよ。

前問及び前々問で気がついた人もいたかもしれないが、 $A$  が有限集合のときは、 $A$  から  $A$  への写像は全射ならば単射であるし、単射ならば全射であることが知られている。しかし無限集合ではこのことは成立しない。この問題は「その例を作れ」という問題である。例は沢山あるのでここで示した例でなくとも勿論よい。

$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  を次のように定義する； $f(1) = 1$  であり、 $n > 1$  に対しては  $f(n) = n - 1$  とする。任意の自然数  $n$  に対し  $a = n + 1$  とおくと  $f(a) = n$  となるので  $f$  は全射である。また  $1 \neq 2$  であるが、 $f(1) = f(2)$  なので単射ではない。よって  $f$  は全射であるが単射ではない。

$g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  を  $g(n) = 2n$  と定義する。 $b = 1 \in \mathbb{N}$  とすると任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対し  $f(n) = 2n \neq 1$  なので  $g$  は全射ではない。任意の  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  に対し  $g(n_1) = g(n_2)$  とすると  $2n_1 = 2n_2$  より  $n_1 = n_2$  となる。よって  $g$  は単射である。よって  $g$  は単射であるが全射ではない。

**演習問題 2.11** 以下の (1)~(9) の写像について、

- (a) 単射であるが全射ではない。
- (b) 全射であるが単射ではない。
- (c) 単射でも全射でもない。
- (d) 全単射である。

のどれに相当するのかを判定せよ。

- (1)  $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f_1(x) = e^x$  と決める。
- (2)  $f_2: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f_2(x) = e^x$  と決める。
- (3)  $f_3: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  を  $f_3(x) = e^x$  と決める。
- (4)  $f_4: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  を  $f_4(x) = e^x$  と決める。
- (5)  $f_5: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f_5(x) = \log x$  と決める。
- (6)  $f_6: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f_6(x) = \cos x$  と決める。
- (7)  $f_7: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  を  $f_7(x) = \cos x$  と決める。
- (8)  $f_8: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  を  $f_8(x) = \cos x$  と決める。
- (9)  $f_9: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f_9(x) = \cos x$  と決める。

写像が実数上の関数の場合単調増加または単調減少であれば単射になる。以下ではこのことを用いるのでここで証明しておく。単調増加とは

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

が成立することであり、単調減少とは

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

が成立することであった。

(1)  $f: X \rightarrow Y$  が単調増加のとき単射である。

$x_1, x_2$  を  $X$  の任意の元とする。  $x_1 \neq x_2$  とすると (a)  $x_1 < x_2$  または (b)  $x_1 > x_2$  のどちらかが成立する。(a) の場合  $f(x_1) < f(x_2)$  が成立し、(b) の場合  $f(x_1) > f(x_2)$  が成立する。いずれの場合も  $f(x_1) \neq f(x_2)$  なので単射が証明される。

(2)  $f: X \rightarrow Y$  が単調減少のとき単射である。

$x_1, x_2$  を  $X$  の任意の元とする。  $x_1 \neq x_2$  とすると (a)  $x_1 < x_2$  または (b)  $x_1 > x_2$  のどちらかが成立する。(a) の場合  $f(x_1) > f(x_2)$  が成立し、(b) の場合  $f(x_1) < f(x_2)$  が成立する。いずれの場合も  $f(x_1) \neq f(x_2)$  なので単射が証明される。 ■

(1)  $e$  (自然対数の底) は  $e > 1$  なので  $y = e^x$  は単調増加である。よって  $f$  は単射である。

任意の実数  $x$  に対し  $e^x > 0$  が成立する。 $-1$  に対し  $e^x = -1$  となる実数  $x$  は存在しないので全射ではない。以上により (a) である。

(2) 単射であることは (1) と同様に示すことができる。全射でないことも (1) と同様に示すことができる。以上により (a) である。

(3) 単射であることは (1) と同様に示すことができる。グラフの様子よりこの場合は全射であることは分かると思うが、厳密な証明のためには次の「中間値の定理」が必要になる。

- $f$  は閉区間  $[a, b]$  で連続な関数とする。最大値を  $M$ 、最小値を  $m$  とする。すなわち  $M = \max\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$ 、 $m = \min\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$  とする。任意の実数  $\mu$  に対し  $m \leq \mu \leq M$  を満たすならば  $\mu = f(c)$  を満たす実数  $c$  が存在する。

この事実に関しては「解析学 I」で簡単にふれるが、ここではこの定理の成立を前提とする。全射であるためには

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad y > 0 \implies \exists x \in \mathbb{R} \quad y = e^x$$

を示す必要がある。 $y$  を  $y > 0$  となる任意の実数とする。 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$  より  $y < e^b$  となる実数  $b$  が存在する。 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  より  $e^a < y$  となる実数  $a$  が存在する。 $e^x$  は単調増加なので  $a < b$  となっている。 $y = e^x$  は連続なので中間値の定理を用いると、 $y = e^x$  となる実数  $x$  の存在が分かる。以上により (d) であることが分かる。

(4) 単射であることは (1) と同様に示すことができる。定義域は  $(0, \infty)$  なので、 $x$  が定義域のとき  $e^x > 1$  である。 $\frac{1}{2} \in (0, \infty)$  であるが、 $e^x = \frac{1}{2}$  となる  $x \in (0, \infty)$  は存在しない。よって全射ではない。以上により (a) である。

(5)  $y = \log x$  は単調増加なので  $f$  は単射である。任意の  $y \in \mathbb{R}$  に対し  $x = e^y$  とおくと  $\log x = \log e^y = y$  となるので  $f$  は全射である。以上により (d) である。

(6) 例えば  $\cos 0 = 1 = \cos 2\pi$  なので単射ではない。また任意の実数  $x$  に対し  $-1 \leq \cos x \leq 1$  なので全射ではない。以上により (c) である。

(7) 単射でないのは (6) と同様に示すことができる。任意の  $y \in [-1, 1]$  に対し  $y = \cos x$  となる  $x \in \mathbb{R}$  は存在するので全射である。(3) と同様に全射であることをきちんと示すには「中間値の定理」を用いる必要がある。 $-1 \leq y \leq 1$  を満たす任意の実数  $y$  に対し  $y = \cos x$  となる実数  $x$  の存在を示す。 $\cos 0 = 1, \cos \pi = -1$  であり、 $y = \cos x$  は  $[0, \pi]$  で連続である。「中間値の定理」より  $y = \cos x$  となる実数  $x$  が存在する。以上により (b) である。

(8)  $[0, \pi]$  に制限すると  $\cos x$  が単調減少 ( $\forall x, x' \in \mathbb{R}$  に対し  $x < x' \implies \cos x > \cos x'$ ) なので単射である。全射であるのは (7) と同様である。以上により (d) である。

(9) 単射は (8) と同様に示すことができる。全射でないことは (6) と同様に示すことができる。以上により (a) である。

**演習問題 2.12** 例 2.7(5) の  $f$  が全射でないことを示せ。

全射でないことを示すためには  $f(A) \neq A$  であることを示せばよい。 $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0\}$  なので  $2 \in A$  である。このとき  $2 \notin f(A)$  を示す。 $f(A) = \{y \in A \mid \exists x \in A y = f(x) = x^2\}$  なので、 $2 \in f(A)$  とすると、ある  $x \in A$  が存在して  $2 = x^2$  となる。 $x \geq 0$  より  $x = \sqrt{2}$  となるので  $\sqrt{2} = x \in \mathbb{Q}$  となり矛盾。よって  $2 \notin f(A)$  である。ここで  $\sqrt{2}$  が有理数でないということは既知とした。

**演習問題 2.13**  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$  とする。

(1)  $f$  と  $g$  が単射ならば、 $g \circ f: A \rightarrow C$  も単射であることを証明せよ。

(2)  $f$  と  $g$  が全射ならば、 $g \circ f: A \rightarrow C$  も全射であることを証明せよ。

ヒント：単射と全射の定義が満たされることを示せば良い。

(1)  $x_1, x_2$  を  $A$  の任意の元とする。 $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \implies x_1 = x_2$  を証明すれば  $g \circ f$  が単射であることが示される。 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$  なので  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$  が成立しているとすると、 $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$  が成立する。 $g$  は単射なので  $f(x_1) = f(x_2)$  が得られる。更に  $f$  が単射なので  $x_1 = x_2$  となり  $g \circ f$  が単射であることが分かる。

(2) 任意の  $z \in C$  に対し元  $x \in A$  が存在して  $z = (g \circ f)(x)$  が成立することを示せばよい。 $z$  を  $C$  の任意の元とする。 $g$  は全射なので  $y \in B$  が存在して  $z = g(y)$  が成立する。 $f$  は全射なので  $y$  に対し  $x \in A$  が存在して  $y = f(x)$  が成立する。以上により  $x \in A$  が見つかった。このとき  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$  となる。よって  $g \circ f$  は全射であることが分かる。

**演習問題 2.14**  $X, Y$  を集合とし、 $f: X \rightarrow Y$  とする。 $A, B$  を  $X$  の部分集合とする。

(1)  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$  を証明せよ。

(2)  $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$  を証明せよ。

(3)  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$  とはならない例を挙げよ。

ヒント：(1), (2) については、問題 2.5 のヒントを参照。(3) については、そういう例を作れば良い。

ここで  $f(A)$  の定義をもう一度書いておく。 $f: X \rightarrow Y$  と  $A \subseteq X$  に対し

$$f(A) = \{y \mid \exists x \in X y = f(x)\}$$

であった、 $A$  という元を  $f$  で写したものでないことに注意。

(1) 最初に  $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$  の成立を示す。  $y$  を  $f(A \cup B)$  の任意の元とする。  $f(A \cup B)$  の定義から (ここが分からない人は  $f(A)$  の定義をもう一度確認してきちんと理解すること), 元  $x \in A \cup B$  が存在して  $y = f(x)$  となる。  $x \in A$  の場合  $y \in f(A)$  となる (しつこいようだが分からない人は  $f(A)$  の定義の確認を)。  $f(A) \subseteq f(A) \cup f(B)$  より  $y \in f(A) \cup f(B)$  が成立する。  $x \in B$  の場合  $y \in f(B)$  となる ((しつこい)<sup>2</sup> ようだが分からない人は  $f(A)$  の定義の確認を)。  $f(B) \subseteq f(A) \cup f(B)$  より  $y \in f(A) \cup f(B)$  が成立する。 いずれの場合も  $y \in f(A) \cup f(B)$  となるので  $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$  が成立する。

次に  $f(A \cup B) \supseteq f(A) \cup f(B)$  の成立を示す。  $y$  を  $f(A) \cup f(B)$  の任意の元とする。  $y \in f(A)$  の場合は  $\exists x \in A$   $y = f(x)$  となる。  $A \subseteq A \cup B$  より  $x \in A \cup B$  となるので  $y \in f(A \cup B)$  が成立する。  $y \in f(B)$  の場合は  $\exists x \in B$   $y = f(x)$  となる。  $B \subseteq A \cup B$  より  $x \in A \cup B$  となるので  $y \in f(A \cup B)$  が成立する。 いずれの場合も  $y \in f(A \cup B)$  となるので  $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$  が成立する。 以上により  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$  が成立する。

(2)  $y$  を  $f(A \cap B)$  の任意の元とする。 このとき  $x \in A \cap B$  が存在して  $y = f(x)$  となる。  $A \cap B \subseteq A$  より  $x \in A$  となる。 よって  $y \in f(A)$  が成立する。  $A \cap B \subseteq B$  より  $x \in B$  となる。 よって  $y \in f(B)$  が成立する。 よって  $y \in f(A) \cap f(B)$  となるので  $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$  が成立する。

(3) 等号が成立しない状況进行分析することで例を作れる。 例えば  $A \cap B = \emptyset$  だが  $f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$  のような例を作れば等号が成立しない例になる。  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f(x) = x^2$  で定義する。  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$  とすると  $A \cap B = \emptyset$  なので  $f(A \cap B) = \emptyset$  である。  $f(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$ ,  $f(B) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$  なので  $f(A) \cap f(B) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$  となる。 この例の場合  $f(A \cap B) \subsetneq f(A) \cap f(B)$  となっている。