

演習問題 3.1 次の計算をせよ。

(1) $(3 + 5i) + (4 - 7i)$

(2) $(2 + 3i)(3 - 4i)$

(3) $\frac{5 + 3i}{1 + 2i}$

(4) $\frac{1}{5 - 2i}$

(1) $7 - 2i$ (2) $18 + i$ (3) $\frac{5 + 3i}{1 + 2i} = \frac{(5 + 3i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{11}{5} - \frac{7}{5}i$

(4) $\frac{1}{5 - 2i} = \frac{5 + 2i}{(5 - 2i)(5 + 2i)} = \frac{5}{29} + \frac{2}{29}i$

演習問題 3.2 命題 3.2 を証明せよ。

$\alpha = a + bi$, $\alpha_1 = a_1 + b_1i$, $\alpha_2 = a_2 + b_2i$ とおく。

(1) $\overline{\overline{\alpha}} = a - bi = a + (-b)i$ なので, $\overline{\overline{\overline{\alpha}}} = a - (-b)i = a + bi = \alpha$ となる。

(2) $\alpha_1 + \alpha_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$ なので

$$\begin{aligned} \overline{\alpha_1 + \alpha_2} &= \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i} \\ &= (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i \\ &= a_1 - b_1i + a_2 - b_2i \\ &= \overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_2} \end{aligned}$$

(3) $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$ なので

$$\overline{\alpha_1 \cdot \alpha_2} = \overline{(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i} = (a_1a_2 - b_1b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1)i$$

であるが,

$$\overline{\overline{\alpha_1}} \cdot \overline{\overline{\alpha_2}} = (a_1 - b_1i) \cdot (a_2 - b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1)i$$

となるので $\overline{\alpha_1 \cdot \alpha_2} = \overline{\overline{\alpha_1}} \cdot \overline{\overline{\alpha_2}}$ が成立する。

(4)

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)}{(a_2 + b_2i)(a_2 - b_2i)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + (a_2b_1 - a_1b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}$$

なので

$$\overline{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) - (a_2b_1 - a_1b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}$$

となる。一方

$$\frac{\overline{\alpha_1}}{\overline{\alpha_2}} = \frac{a_1 - b_1i}{a_2 - b_2i} = \frac{(a_1 - b_1i)(a_2 + b_2i)}{(a_2 - b_2i)(a_2 + b_2i)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) - (a_2b_1 - a_1b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}$$

となるので

$$\overline{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)} = \frac{\overline{\alpha_1}}{\overline{\alpha_2}}$$

が成立する。

演習問題 3.3 次の問いに答えよ。

(1) $\alpha = 0 \iff |\alpha| = 0$ を証明せよ。

(2) $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha||\beta|$ を示せ。

(1) $\alpha = a_1 + a_2i$ とおくと

$$\alpha = 0 \iff a_1 = 0 \text{ かつ } a_2 = 0 \iff a_1^2 + a_2^2 = 0 \iff |\alpha| = 0$$

となり成立する。

(2) $\alpha = a_1 + b_1i$, $\beta = a_2 + b_2i$ とおくと

$$\alpha \cdot \beta = (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$$

なので

$$\begin{aligned} |\alpha \cdot \beta|^2 &= (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2 \\ &= a_1^2a_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + b_1^2b_2^2 + a_1^2b_2^2 - 2a_1b_2a_2b_1 + a_2^2b_1^2 \\ &= a_1^2(a_2^2 + b_2^2) + b_1^2(a_2^2 + b_2^2) \\ &= (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \\ &= (|\alpha||\beta|)^2 \end{aligned}$$

となる。 $|\alpha \cdot \beta| \geq 0$, $|\alpha| \geq 0$, $|\beta| \geq 0$ より $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha||\beta|$ となる。

共役複素数を用いる別解もある。紹介しておこう。 $|\alpha|^2 = \alpha\bar{\alpha}$, $|\beta|^2 = \beta\bar{\beta}$ なので

$$|\alpha \cdot \beta|^2 = (\alpha\beta)\overline{\alpha\beta} = \alpha\beta\bar{\alpha}\bar{\beta} = \alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta} = |\alpha|^2|\beta|^2$$

あとは前と同様である。

演習問題 3.4 図 3.1 を参考にして定理 3.3 を証明せよ。

(1) O , β , $\alpha + \beta$ を頂点とする 3 角形を考える。ただし 3 角形がつぶれて 1 直線になっている場合も含むとする。この 3 角形の 3 辺の長さは $|\alpha|$, $|\beta|$, $|\alpha + \beta|$ なので三角不等式より

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

が成立する。

(2) O , α , β を頂点とする 3 角形を考える。ただし 3 角形がつぶれて 1 直線になっている場合も含むとする。この 3 角形の 3 辺の長さは $|\alpha|$, $|\beta|$, $|\alpha - \beta|$ なので三角不等式より

$$|\alpha| \leq |\alpha - \beta| + |\beta|$$

が成立する。移行すると (2) 式の成立が分かる。

ここで紹介した証明は幾何的 (図形的) 証明だが代数的証明も紹介しておこう。

$\alpha = a + ib$, $\beta = c + id$ とおくと $\alpha + \beta = (a + c) + i(b + d)$ なので

$$|\alpha + \beta|^2 = (a + c)^2 + (b + d)^2, \quad |\alpha|^2 = a^2 + b^2, \quad |\beta|^2 = c^2 + d^2$$

となっている。シュワルツの不等式 : $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ を用いると

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta|^2 &= (a + c)^2 + (b + d)^2 = a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2(ac + bd) + c^2 + d^2 \\ &\leq |\alpha|^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} + |\beta|^2 \\ &= |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 = (|\alpha| + |\beta|)^2 \end{aligned}$$

となる。 $|\alpha + \beta| \geq 0$ なので

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

を得る。証明した式において $\alpha \rightarrow \alpha - \beta$ という置き換えを行うと (2) の式が得られる。