数学序論問題解説 #14

河野

演習問題 5.19

(1)　$f(x)=x^2+x+1$ とする。$(1,3)$ における f のグラフの接線と法線の方程式を求めよ。
(2)　$f(x)=x(x-1)(x-2)$ のグラフに接し，$y=2x+1$ と平行な直線の方程式を求めよ。
(3)　放物線 $y=ax^2+bx+c$ 上に相異なる 2 点 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$ をとったとする。この放物線の接線で，線分 PQ に平行となるのは，どの点における接線か？ その点の x 座標の値を求めよ。

(1)　$x=a$ における接線の方程式は

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

である。$f'(x)=2x+1$ なので $f'(1)=3$ である。また $f(1)=3$ なので接線の方程式は

$$y=f'(1)(x-1)+f(3)=3(x-1)+3=3x$$

である。また法線は接線と直交するので法線の傾きは $-\dfrac{1}{f'(1)}=-\dfrac{1}{3}$ である。よって法線の方程式は

$$\begin{aligned}y&=-\frac{1}{f'(1)}(x-1)+f(1)\\&=-\frac{1}{3}(x-1)+3\\&=-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}\end{aligned}$$

である。
(2)　$x=a$ における接線の方程式は

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

である。この接線が $y=2x+1$ と平行のとき $f'(a)=2$ が成立している。$f'(x)=3x^2-6x+2$ なので $f'(a)=3a^2-6a+2=2$ となる。これを解いて $a=0,2$ を得る。$f(0)=0$，$f(2)=0$ なので $a=0$ のとき接線の方程式は

$$y=2x$$

$a=2$ のときの接線の方程式は

$$y=2x-4$$

となる。
(3)　線分 PQ の傾きは

$$\begin{aligned}\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}&=\frac{ax_2^2+bx_2+c-(ax_1^2+bx_1+c)}{x_2-x_1}=\frac{a(x_2-x_1)(x_2+x_1)+b(x_2-x_1)}{x_2-x_1}\\&=a(x_2+x_1)+b\end{aligned}$$

となる。また

$$f'(x) = 2ax + b$$

なので接線が線分 PQ と平行となるような点の x 座標は $x = \dfrac{x_2 + x_1}{2}$ である。接点の座標は

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, a \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 + b \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) + c \right)$$

である。

演習問題 5.20 　極大点，極小点は臨界点であることを証明せよ。

c が関数 $y = f(x)$ の極大点とする。ある正数 δ が存在して $0 < |x - c| < \delta$ を満たす任意の x に対し $f(x) < f(c)$ が成立する。c に十分近い x に対しては $f(x) - f(c) < 0$ が成立している。絶対値の十分小さい $h > 0$ に対しては

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} < 0$$

が成立しているので

$$f'_+(c) = \lim_{h \to +0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leqq 0$$

が成立する。絶対値の十分小さい $h < 0$ に対しては

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} > 0$$

が成立しているので

$$f'_-(c) = \lim_{h \to -0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geqq 0$$

が成立する。$f'(c) = \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ が存在する必要十分条件は $f'_+(c) = \displaystyle\lim_{h \to +0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ および $f'_-(c) = \displaystyle\lim_{h \to -0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ が存在して，$f'_+(c) = f'_-(c)$ が成立することである。よって

$$0 \leqq f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leqq 0$$

より

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = 0$$

となる。よって c は臨界点である。極小値の場合も同様に証明することができる。

演習問題 5.21 　以下の関数のグラフの概形を描け。

(1) $f(x) = 2x^2 - x^4$ 　　(2) $f(x) = xe^{-x}$ 　　(3) $f(x) = x^2 \log x$

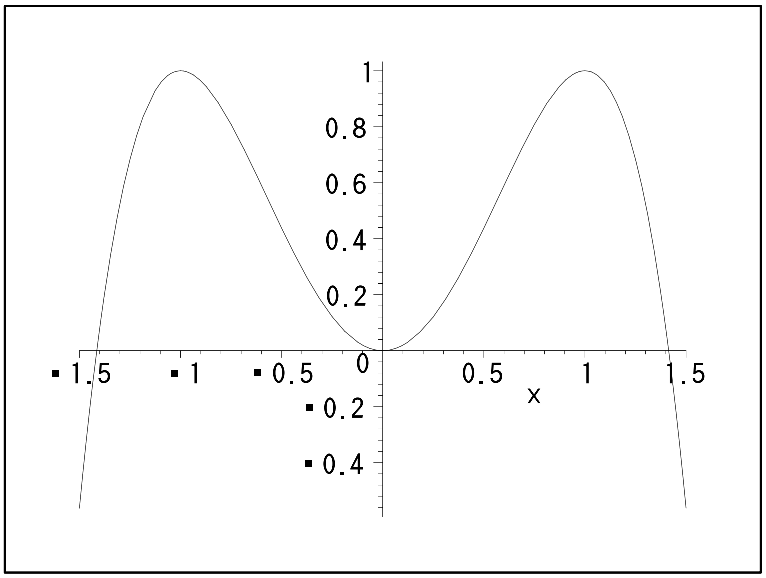
(4) $f(x) = 3 \sin x + \sin 3x$ 　　(5) $f(x) = x - \sqrt{1 + x}$ 　　(6) $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$

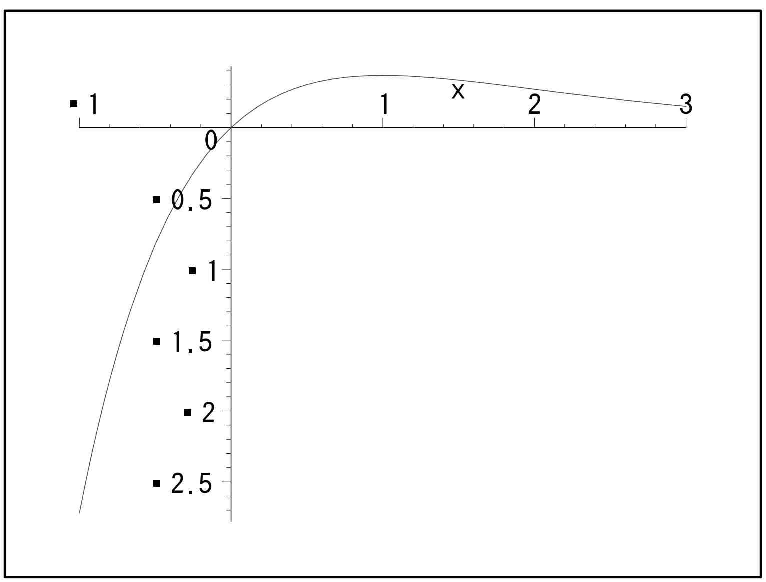
(7) $f(x) = x + 2\cos x$ (8) $f(x) = \sin x(1+\cos x)$ (9) $f(x) = x^{-x^2}$

(1) $f'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1-x^2) = 4x(1-x)(1+x)$ なので $f'(x) = 0$ となるのは $x = -1, 0, 1$ である。増減表は次のようになる。

x		-1		0		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$

$f(x) = 2x^2 - x^4 = 0$ を解くと $x = 0, \pm\sqrt{2}$ となる。よって曲線は x 軸と 3 点で交わっている。($x = 0$ は重解なので接している。) このことに注意して概形を描くと次図のようになる。変換に問題があって以下のグラフの中のマイナス (–) が黒点に変わっています。注意を。





(2) $f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$ なので $f'(x)=0$ となるのは $x=1$ のときのみである。増減表は次のようになる。

x		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ および $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ということに注意してグラフを描くと前図のようになる。

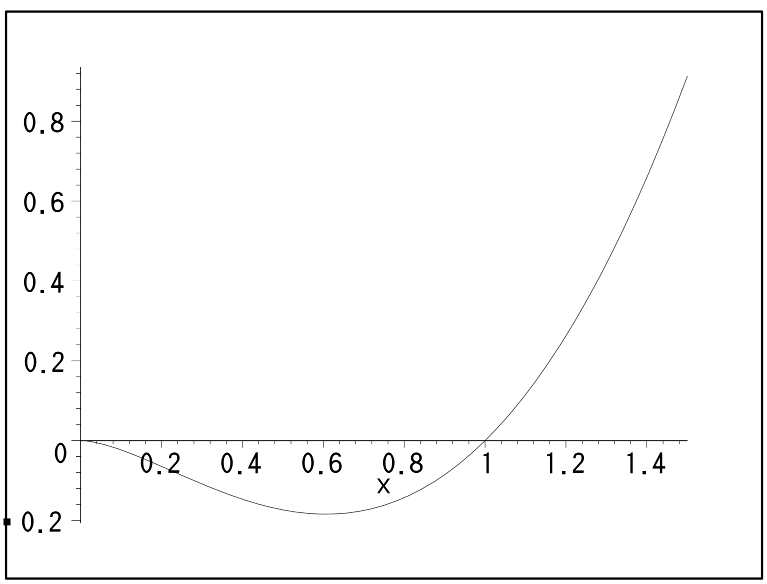
(3) $\log x$ が定義されるのは $x>0$ なので $f(x)$ の定義域も $x>0$ である。$f'(x)=2x\log x+x^2\dfrac{1}{x}=x\left(2\log x+1\right)=0$ を解いて，$x=\sqrt{\dfrac{1}{e}}$ を得る。よって増減表は次の様になる。

x		$\sqrt{\dfrac{1}{e}}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2e}$	$\nearrow$

$x\to+0$ としたときの関数の挙動を調べる。ここでは後で学ぶロピタルの定理を用いる。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+0} x^2\log x &= \lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}\frac{\left(\log x\right)'}{\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'}\\ &=\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{2}{x^3}}\\ &=-\frac{1}{2}\lim_{x\to+0}x^2=0\end{aligned}$$

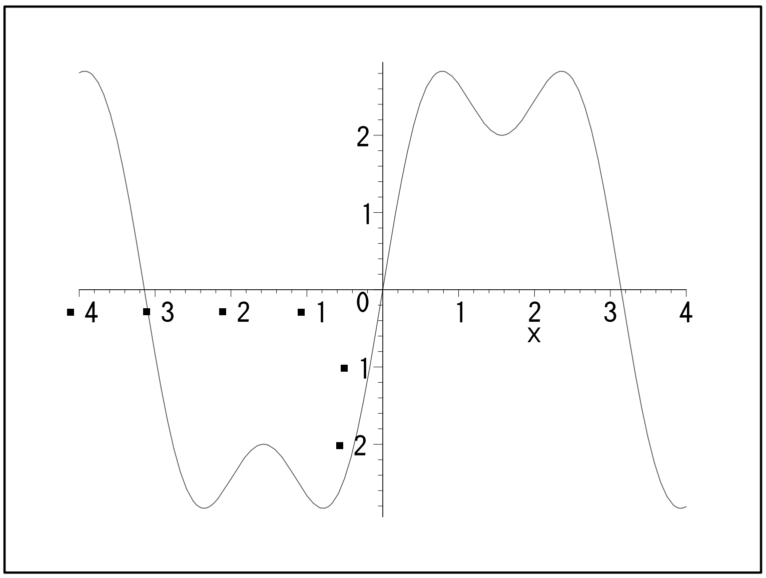
$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ であり，また $f(x)=0$ となるのは $x=1$ のときのみである。このことに注意してグラフを描くと次図の様になる。



(4) $\sin x$ は周期 2π の周期関数であり，$\sin 3x$ は周期 $\dfrac{2\pi}{3}$ の周期関数である。これより $f(x)$ は周期 2π の周期関数になる。よって $-\pi \leqq x \leqq \pi$ の範囲でグラフを描き，それを x 軸の方向へ $2n\pi$(n は整数) 平行移動したグラフが求めるグラフとなる。よって $-\pi \leqq x \leqq \pi$ の範囲で調べる。

$f'(x) = 3\cos x + 3\cos 3x = 3\cos x + 3(4\cos^3 x - 3\cos x) = 6\cos x\left(2\cos^2 x - 1\right) = 0$ となるのは $\cos x = 0$ または $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$ なので，$-\pi \leqq x \leqq \pi$ の範囲では $x = -\dfrac{3}{4}\pi, -\dfrac{1}{2}\pi, -\dfrac{1}{4}\pi, \dfrac{1}{4}\pi, \dfrac{1}{2}\pi, \dfrac{3}{4}\pi$ である。よって増減表は次のようになる。

x		$\frac{3}{4}\pi$		$-\frac{1}{2}\pi$		$-\frac{1}{4}\pi$		$\frac{1}{4}\pi$		$\frac{1}{2}\pi$		$\frac{3}{4}\pi$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{4}{\sqrt{2}}$	↗	-2	↘	$-\frac{4}{\sqrt{2}}$	↗	$\frac{4}{\sqrt{2}}$	↘	2	↗	$\frac{4}{\sqrt{2}}$	↘



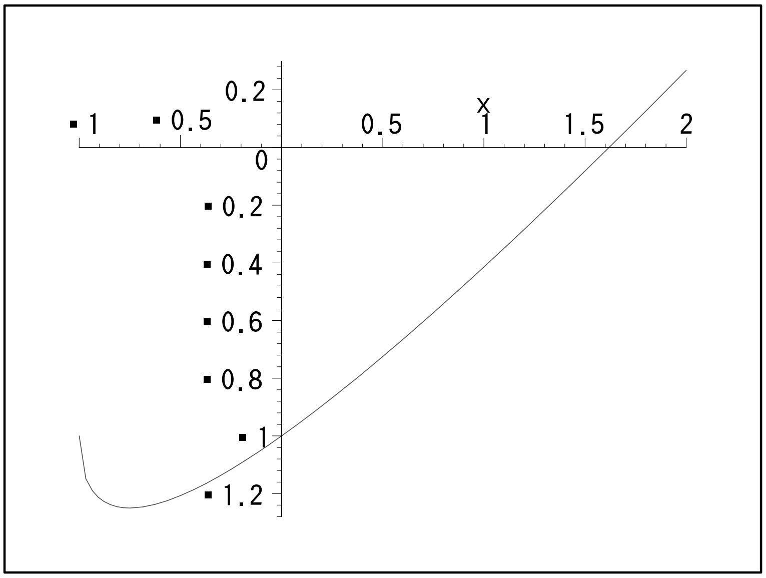
(5) $f(x) = x - \sqrt{1+x}$ は $1+x \geqq 0$ で定義されている。$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ なので $f'(x) = 0$ より $x = -\dfrac{3}{4}$ となる。

x		$-\frac{3}{4}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

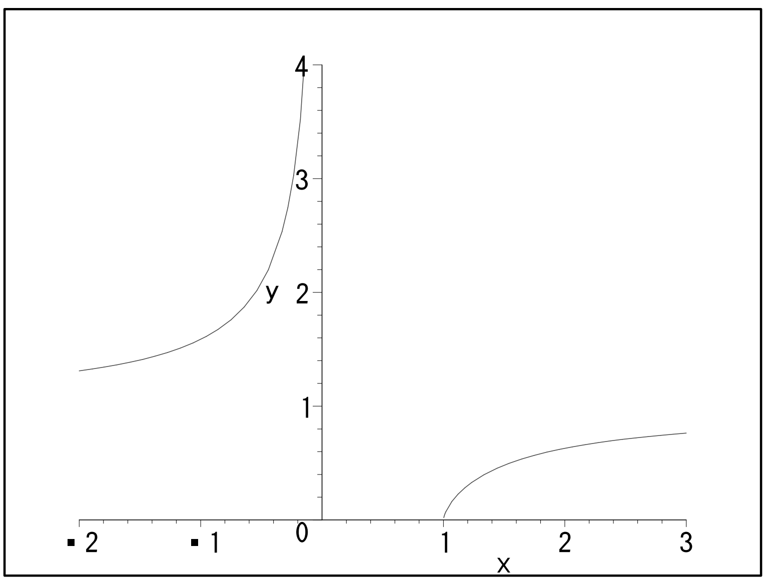
$f(x) = 0$ とすると $x - \sqrt{1+x} = 0$ より $x = \sqrt{1+x}$ となる。両辺を 2 乗して

$$x^2 = 1 + x$$

を得る。この 2 次方程式の解は $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ である。しかし $x = \sqrt{1+x} \geqq 0$ より $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ は不適である。また $f(0) = 0 - \sqrt{1+0} = -1$ である。以上のことに注意してグラフを描くと次図のようになる。



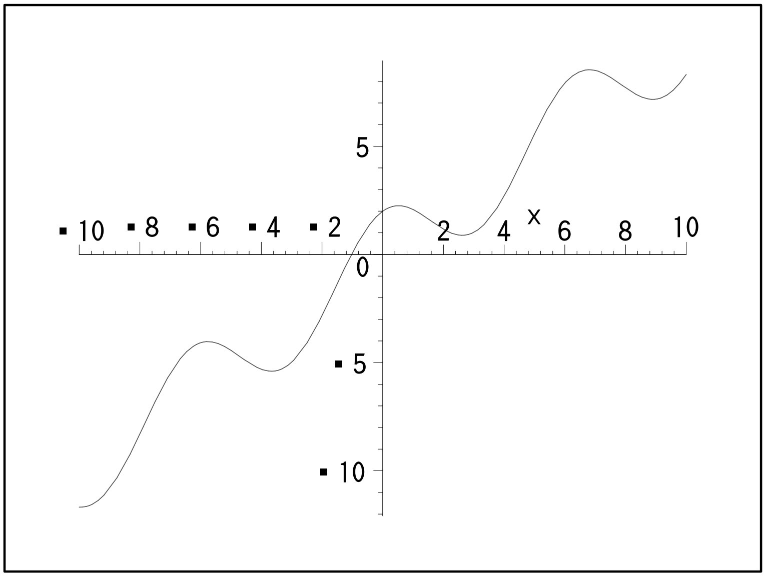
(6) $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$ なので $1 - \dfrac{1}{x} \geqq 0$ が必要である。$x \geqq 0$ のときは $1 \geqq \dfrac{1}{x}$ より $x \geqq 1$ である。$x < 0$ のときは常に $1 - \dfrac{1}{x} \geqq 0$ である。$f'(x) = \dfrac{2}{3}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{3}} \dfrac{1}{x^2}$ は $x = 1$ においては微分可能ではない。それ以外では $f'(x) > 0$ である。$\lim_{h \to -0} f(x) = \infty$ ということに注意してグラフを描くと次図のようになる。

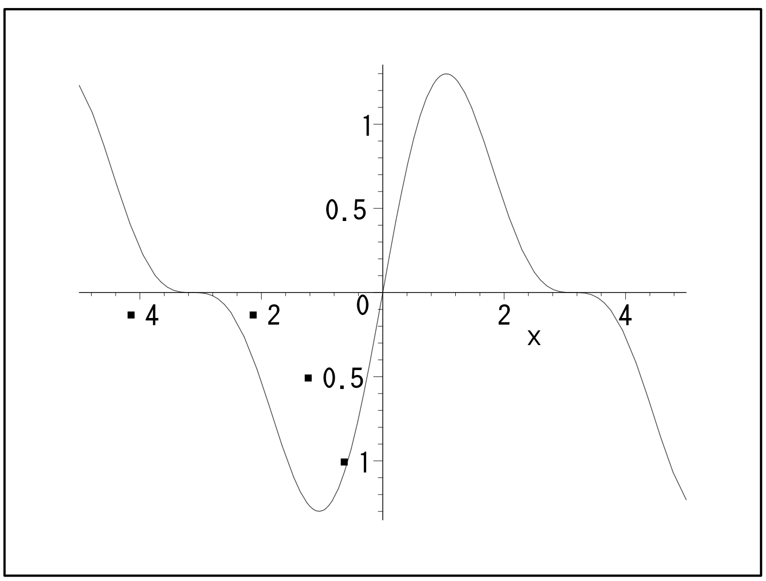


(7) $f(x) = x+2\cos x$ なので $f'(x) = 1-2\sin x$ である。$f'(x) = 0$ となるのは $2n\pi+\dfrac{\pi}{6}, 2n\pi+\dfrac{5\pi}{6}$

(n は整数) である。増減表とグラフは次のようになる。

x		$2n\pi+\frac{\pi}{6}$		$2n\pi+\frac{5\pi}{6}$		$2(n+1)\pi+\frac{\pi}{6}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$2n\pi+\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$	$\searrow$	$2n\pi+\frac{5\pi}{6}-\sqrt{3}$	$\nearrow$	$2(n+1)\pi+\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$	$\searrow$





(8) $f(x)$ は周期 2π の周期関数なので $-\pi \leqq x \leqq \pi$ の範囲で考える。$f'(x)=\cos x(1+\cos x)-\sin^2 x=\cos+\cos^2 x-(1-\cos^2 x)=2\cos^2 x+\cos x-1=(2\cos x-1)(\cos x+1)=0$ とすると，$\cos x+1=0$ または $2\cos x-1=0$ である。$\cos x+1=0$ のとき $x=-\pi,\pi$ である。$2\cos x-1=0$

のとき $x=-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}$ である。増減表は次のようになるので，グラフは前図の様になる。

x	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{3}$		$\dfrac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

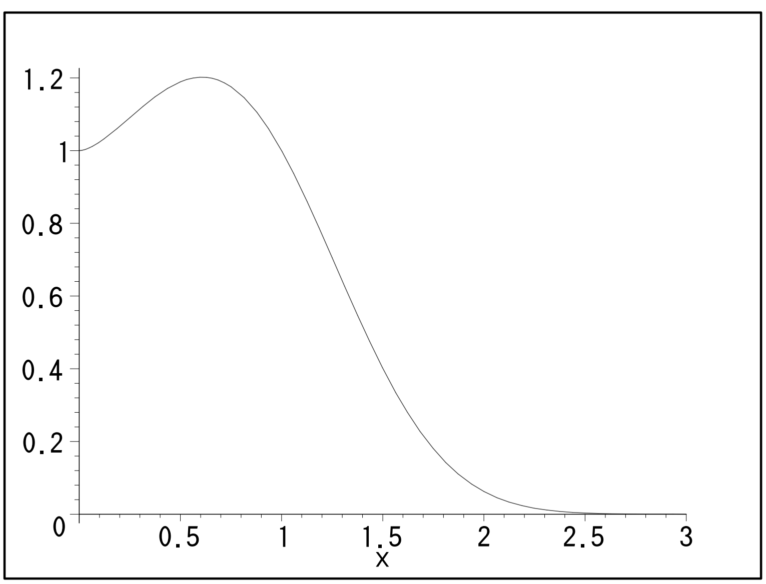
(9) $f(x)=x^{-x^2}$ なので定義域は $x>0$ である。導関数を求めるのに対数微分法を用いる。$y=x^{-x^2}$ とすると $\log y=-x^2\log x$ である。両辺を x で微分すると $\dfrac{1}{y}y'=-2x\log x-x^2\dfrac{1}{x}=-2x\log x-1$ なので $y'=-x\cdot x^{-x^2}\bigl(2\log x+1\bigr)$ となる。$f'(x)=0$ とすると，$2\log x+1=0$ なので $x=e^{-\frac{1}{2}}$ となる。増減表は

x		$e^{-\frac{1}{2}}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(e^{-\frac{1}{2}})$	$\searrow$

となる。$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ である。また $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)$ を求める。$\log y=-x^2\log x$ の極限を求める。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+0}\log f(x)&=\lim_{x\to+0}\bigl(-x^2\log x\bigr)=-\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\dfrac{1}{x^2}}\\&=-\lim_{x\to+0}\frac{\bigl(\log x\bigr)'}{\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'}=-\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-2\dfrac{1}{x^3}}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to+0}x^2=0\end{aligned}$$

なので，$0=\displaystyle\lim_{x\to+0}\log f(x)=\log\left(\lim_{x\to+0}f(x)\right)$ となる。よって $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=1$ となる。以上を考慮してグラフを書くと次図のようになる。



演習問題 *5.22　$x_1, x_2 \in [\,a,\, b\,]$ に対し $F(x) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1) - f(x)$ とおき，$F(x)$ の正負を調べることにより命題 5.19 を証明せよ。

$f''(x) < 0$ の場合も同様にできるので，$f''(x) > 0$ の場合のみ証明する。$x_1 < x_2$ としても一般性を失わないので，この場合を考える。

$$\begin{aligned} F(x_1) &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_1 - x_1) + f(x_1) - f(x_1) \\ &= f(x_1) - f(x_1) = 0 \\ F(x_2) &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1) + f(x_1) - f(x_2) \\ &= f(x_2) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_2) = 0 \end{aligned}$$

が成立しているので，$F(x)$ の $[\,x_1,\, x_2\,]$ における最大値，または最小値を与える x_3 で $x_1 < x_3 < x_2$ となるものが存在する。このとき $x = x_3$ で $F(x)$ は極大または極小なので $F'(x_3) = 0$ が成立している。$F''(x) = -f''(x) < 0$ なので $F'(x)$ は $[\,x_1,\, x_2\,]$ で単調減少である。よって $F'(x)$ の $[\,x_1,\, x_2\,]$ における増減表は次のようになっている。

x	x_1		x_3		x_2
$F''(x)$		$-$		$-$	
$F'(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	

よって $(\, x_1,\, x_3\,)$ において $F'(x) > 0$，$(\, x_3,\, x_2\,)$ において $F'(x) < 0$ である。よって $F(x)$ の増減表は次のようになっている。

x	x_1		x_3		x_2
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

よって $(\, x_1,\, x_2\,)$ において $F(x) > 0$ となるので

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1) > f(x)$$

が成立し，上に凸であることが示された。

演習問題 5.23　次の関数のグラフの凹凸を調べ概形を描け。

(1) $y = (x-5)^4(x+1)^3$　　(2) $y = \dfrac{x^2+1}{x}$

(3) $y = e^{-x^2}$　　(4) $y = x \log x$

(1)

$$\begin{aligned} y' &= 4(x-5)^3(x+1)^3 + 3(x-5)^4(x+1)^2 \\ &= (x-5)^3(x+1)^2\bigl\{4(x+1) + 3(x-5)\bigr\} \\ &= (x-5)^3(x+1)^2(7x - 11) \end{aligned}$$

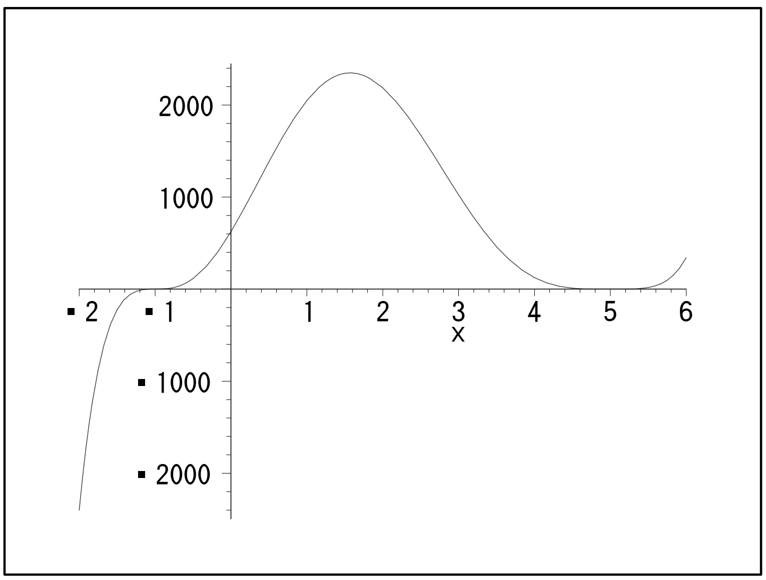
なので $y'=0$ を解いて $x=-1$，5，$\dfrac{11}{7}$ を得る。

$$y'' \;=\; 6(x-5)^2(x+1)(7x^2-22x+7)$$

なので $y''=0$ を解いて $x=-1$，5，$\dfrac{11+6\sqrt{2}}{7}$，$\dfrac{11-6\sqrt{2}}{7}$ を得る。よって増減表は次の様になる。

x		-1		$\frac{11-6\sqrt{2}}{7}$		$\frac{11}{7}$		$\frac{11+6\sqrt{2}}{7}$		5	
y'	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	↗		↗		↗		↘		↘		↗

x 軸との交点は $y=0$ を解いて $x=-1,5$ である。y 軸との交点は y に $x=0$ を代入して $(-5)^4=5^4$ である。以上を考慮してグラフの概形を描くと次のようになっている。



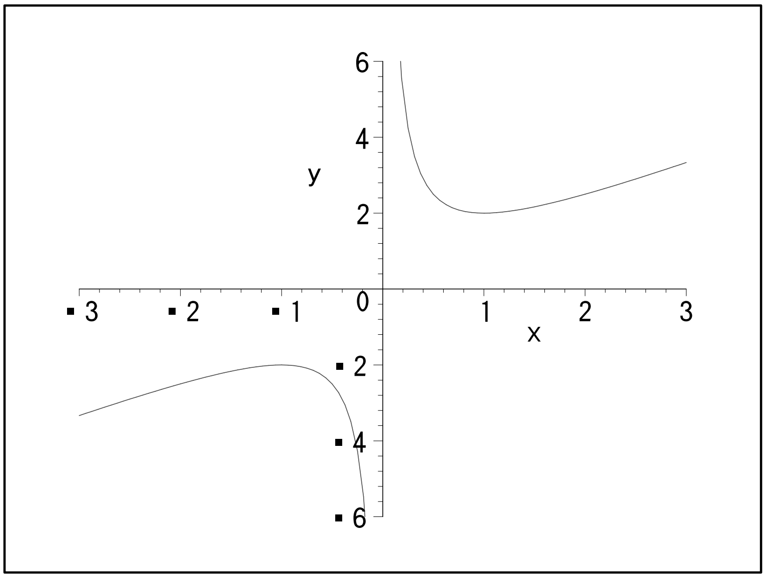
(2) $y'=1-\dfrac{1}{x^2}$ なので $y'=0$ を解いて $x=-1$，1 を得る。$y''=\dfrac{2}{x^3}$ なので増減表は次の様になる。

x		-1		0		1	
y'	$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	$\times$	$+$	$+$	$+$
y	↗		↘	$\times$	↘		↗

グラフは x 軸とも y 軸とも交わらない。

$$\lim_{x\to+0} y=\infty,\quad \lim_{x\to-0} y=-\infty,\quad \lim_{x\to\infty} y=\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} y=-\infty$$

なのでグラフの概形は次のようになる。



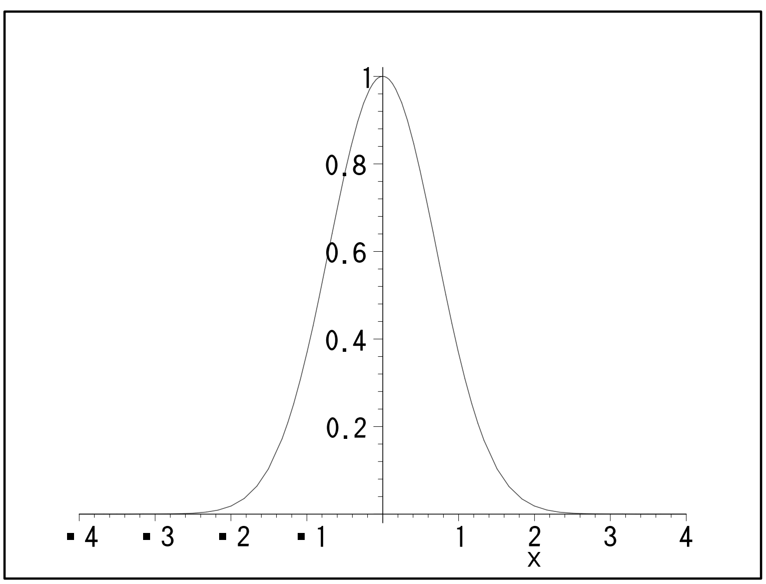
(3) $y' = -2xe^{-x^2}$ なので $y' = 0$ を解いて $x = 0$ を得る。$y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$ なので $y'' = 0$ を解いて $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を得る。よって増減表は次の様になる。

x		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$

グラフは x 軸とは交わらない。y 軸との交点は $y = 1$ である。また

$$\lim_{x\to\infty} y = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} y = 0$$

なのでグラフの概形は次のようになる。



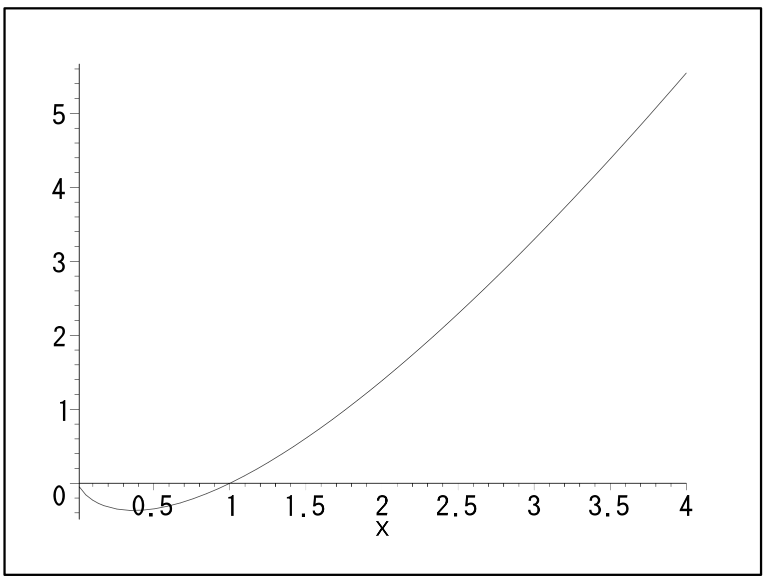
(4) $y' = \log x + 1$ なので $y' = 0$ を解いて $x = \dfrac{1}{e}$ を得る。$y'' = \dfrac{1}{x}$ なので $y'' = 0$ となる x は存在しない。よって増減表は次の様になる。

x	0		$\frac{1}{e}$	
y'	$\times$	$-$	0	$+$
y''	$\times$	$+$	$+$	$+$
y		$\searrow$		$\nearrow$

x 軸との交点は $x = 1$ であり，y 軸とは交わらない。また $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y = \infty$ である。この後学んだロピタルの定理を用いると

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+0} x\log x &= \lim_{x\to+0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0} \frac{\left(\log x\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} \\
&= \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to+0} x = 0
\end{aligned}$$

が分かる。以上からグラフの概形は次のようになっている。



演習問題 5.24　次のようにパラメータ表示された曲線の概形を書け。

(1) $x = x(t) = t^4 - t^2, y = y(t) = t^3 - t$

(2) $x = x(t) = t - t^3, y = y(t) = 1 - t^4$

(3) $x = x(t) = t^2 - t^3, y = y(t) = t - 2t^4$

(4) $x = x(t) = t - t^3, y = y(t) = 1 - t^2 - t^4$

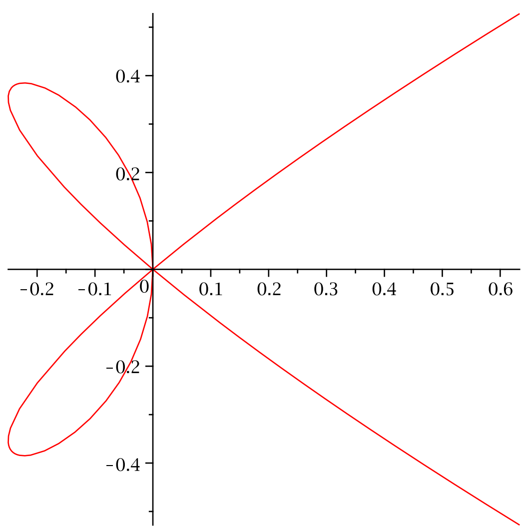
(1) $x'(t) = 4t^3 - 2t$ なので $x'(t) = 0$ を解いて $t = 0, \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を得る。$y'(t) = 3t^2 - 1$ なので $y'(t) = 0$ を解いて $t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を得る。$x'(t), y'(t)$ の正負を調べるために，途中の値を代入して調べると増減表は以下の様になる。

t		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
x'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	$\leftarrow$		$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$		$\rightarrow$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
曲線	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$

$x'(t) = 0$ および $y'(t) = 0$ となる点は $\left(x\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), y\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$，$\left(x\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(-\dfrac{2}{9}, \dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right)$，$(x(0), y(0)) = (0, 0)$，$\left(x\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), y\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \left(-\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$，$\left(x\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(-\dfrac{2}{9}, -\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ である。

$x(t) = 0$ を解くと $t = 0, \pm 1$ を得る。$(x(0), y(0)) = (0, 0)$，$(x(1), y(1)) = (0, 0)$，$(x(-1), y(-1)) = (0, 0)$ なので y 軸との交点は $(0, 0)$ である。

$y(t) = 0$ を解くと $t = 0, \pm 1$ を得る。x 軸との交点は $(0, 0)$ である。以上を考慮して曲線の概形を描くと次の様になる。



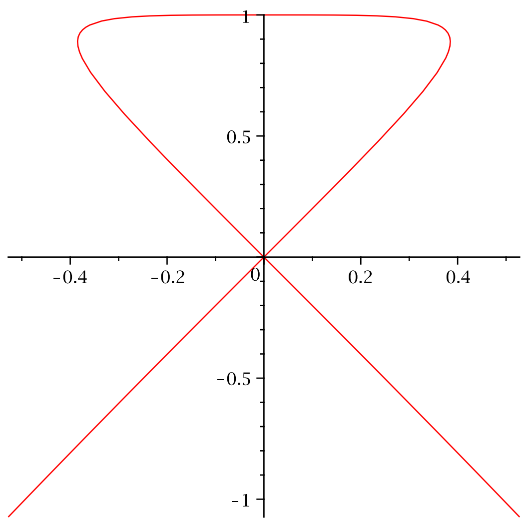
(2) $x'(t) = 1 - 3t^2$ なので $x'(t) = 0$ を解いて $t = \mp\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を得る。$y'(t) = -4t^3$ なので $y'(t) = 0$ を解いて $t = 0$ を得る。$x'(t), y'(t)$ の正負を調べるために，途中の値を代入して調べると増減表は以下の様になる。

t		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
x'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$\leftarrow$		$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\leftarrow$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
曲線	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$

$x'(t)=0$ および $y'(t)=0$ となる点は $\left(x\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=\left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{8}{9}\right)$，$(x(0), y(0))=(0,1)$，$\left(x\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{8}{9}\right)$ である。

$x(t)=0$ を解くと $t=0,\pm1$ を得る。$(x(0), y(0))=(0,1)$，$(x(1), y(1))=(0,0)$，$(x(-1), y(-1))=(0,0)$ なので y 軸との交点は $(0,0),(0,1)$ である。

$y(t)=0$ を解くと $t=\pm1$ を得る。x 軸との交点は $(0,0)$ である。以上を考慮して曲線の概形を描くと次の様になる。



(3) $x'(t)=2t-3t^2$ なので $x'(t)=0$ を解いて $t=0.\frac{2}{3}$ を得る。$y'(t)=1-8t^3$ なので $y'(t)=0$ を解いて $t=\frac{1}{2}$ を得る。$x'(t), y'(t)$ の正負を調べるために，途中の値を代入して調べると増減表は以下の様になる。

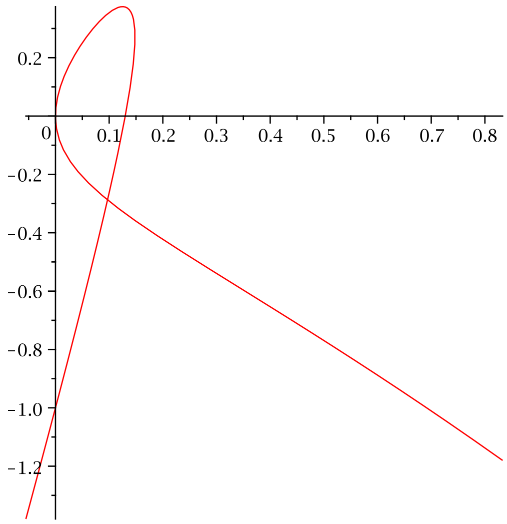
t		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$	
x'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$\leftarrow$		$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\leftarrow$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
曲線	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$

$x'(t)=0$ および $y'(t)=0$ となる点は $(x(0), y(0))=(0,1)$，$\left(x\left(\frac{1}{2}\right), y\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$，

$\left(x\left(\frac{2}{3}\right), y\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \left(\frac{4}{27}, \frac{38}{81}\right)$，である。

$x(t) = 0$ を解くと $t = 0, 1$ を得る。$(x(0), y(0)) = (0, 0)$，$(x(1), y(1)) = (0, -1)$ なので y 軸との交点は $(0, 0), (0, -1)$ である。

$y(t) = 0$ を解くと $t = 0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ を得る。x 軸との交点は $(0, 0), \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{2}, 0\right)$ である。以上を考慮して曲線の概形を描くと次の様になる。



(4) $x'(t) = 1 - 3t^2$ なので $x'(t) = 0$ を解いて $t = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}$ を得る。$y'(t) = -2t - 4t^3$ なので $y'(t) = 0$ を解いて $t = 0$ を得る。$x'(t), y'(t)$ の正負を調べるために，途中の値を代入して調べると増減表は以下の様になる。

t		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
x'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$\leftarrow$		$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\leftarrow$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
曲線	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$

$x'(t) = 0$ および $y'(t) = 0$ となる点は $\left(x\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right)$，$(x(0), y(0)) = (0, 1)$，$\left(x\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right)$ である。

$x(t) = 0$ を解くと $t = 0, \pm 1$ を得る。$(x(0), y(0)) = (0, 1)$，$(x(1), y(1)) = (0, -1)$，$(x(-1), y(-1)) = (0, -1)$ なので y 軸との交点は $(0, 0), (0, -1)$ である。

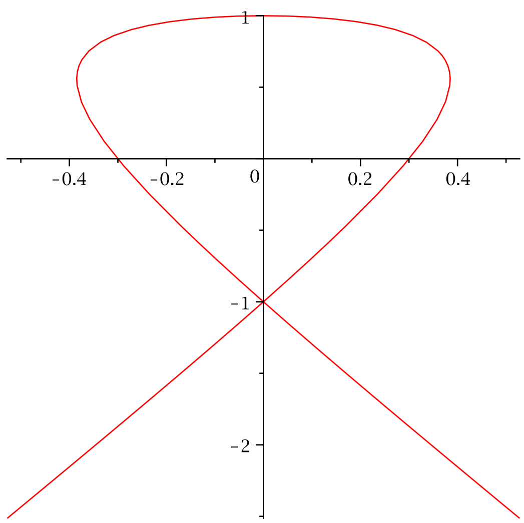
$y(t) = 0$ を解くと $t = \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ を得る。x 軸との交点は $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}, 0\right)$，$\left(-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}, 0\right)$ である。概形なので $\frac{3-\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ の値もおおよそ分かれば

よい。$2 < \sqrt{5} < \dfrac{5}{2}$ から $1 < -1+\sqrt{5} < \dfrac{3}{2}$，$\dfrac{1}{2} < \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < \dfrac{3}{4}$ と変形して $\dfrac{1}{\sqrt{2}} < \sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}} < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を得る。同様に $\dfrac{1}{4} < \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < \dfrac{1}{2}$ を得るので，

$$0.18 \fallingdotseq \frac{1}{4\sqrt{2}} < \frac{3-\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} < \frac{\sqrt{3}}{4} \fallingdotseq 0.43$$

が分かる。$2.1 < \sqrt{5} < 2.3$ から始めると $0.2711 < \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}} < 0.322$ ともう少し正確な値の範囲が分かるが，概形なのでここまで近似を良くしなくてもいいかもしれない。

以上を考慮して曲線の概形を描くと次の様になる。



演習問題 5.25　以下の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\log(1+x)}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log\cos(\alpha x)}{\log\cos(\beta x)}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{a^x-b^x}{x}\quad(a,b>0)$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{e^x}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+3^x)}{x}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)$　(8) $\displaystyle\lim_{x\to0}\ x\log x$　(9) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\ x\sin\frac{1}{x}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\ x^x$　(11) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\ x^{\frac{1}{x}}$　(12) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

(1)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3} &= \lim_{x\to0}\frac{\bigl(\sin x - x\cos x\bigr)'}{\bigl(x^3\bigr)'}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{3x^2}\\ &= \frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\log(1+x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)'}{\left(\log(1+x)\right)'}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\dfrac{1}{1+x}}\\
&= \lim_{x\to 0}(1+x)(e^x+e^{-x}) = 2
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos(\alpha x)}{\log\cos(\beta x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\log\cos(\alpha x)\right)'}{\left(\log\cos(\beta x)\right)'}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos(\alpha x)}\cdot\left(-\sin(\alpha x)\right)\cdot\alpha}{\dfrac{1}{\cos(\beta x)}\cdot\left(-\sin(\beta x)\right)\cdot\beta}\\
&= \frac{\alpha}{\beta}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\beta x)}{\cos(\alpha x)}\cdot\frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}\\
&= \frac{\alpha}{\beta}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\beta x)}{\cos(\alpha x)}\cdot\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}\frac{\beta x}{\sin(\beta x)}\frac{\beta}{\alpha}\\
&= \frac{\alpha^2}{\beta^2}
\end{aligned}$$

(4)

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(a^x-b^x\right)'}{x'} = \lim_{x\to 0}\left(\log a\cdot a^x-\log b\cdot b^x\right) = \log a-\log b$$

(5)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{e^x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^5\right)'}{\left(e^x\right)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{5x^4}{e^x} = 5\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^4\right)'}{\left(e^x\right)'} = 5\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3}{e^x}\\
&= 20\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^3\right)'}{\left(e^x\right)'} = 20\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{e^x} = 60\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2\right)'}{\left(e^x\right)'} = 60\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}\\
&= 120\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x\right)'}{\left(e^x\right)'} = 120\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = 0
\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+3^x)}{x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\log(1+3^x)\right)'}{x'} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+3^x}\log 3\cdot 3^x\\
&= \log 3\lim_{x\to\infty}\frac{3^x}{1+3^x} = \log 3\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\dfrac{1}{3^x}+1}\\
&= \log 3
\end{aligned}$$

(7)

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}=\frac{1}{x^2}-\frac{\cos x}{x\sin x}=\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}=\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}\cdot\frac{x}{\sin x}$$

となるので (3) の結果を用いる。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}\cdot\frac{x}{\sin x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

(8)

$$\lim_{x\to+0}x\log x=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\left(\log x\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to+0}x=0$$

(9) $t=\dfrac{1}{x}$ とおくと $x\to\infty$ のとき $t\to+0$ である。

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to+0}\frac{1}{t}\sin t=\lim_{t\to+0}\frac{\sin t}{t}=1$$

(10) $y=x^x$ に対し $\log y=x\log x$ である。

$$\lim_{x\to+0}\log y=\lim_{x\to+0}x\log x=0$$

が成立している。ここで (8) の結果を用いた。$\log x$ は単射であり，連続関数なので

$$\log 1=0=\lim_{x\to+0}\log y=\log\left(\lim_{x\to+0}y\right)$$

より $\lim\limits_{x\to+0}y=1$ となる。

(11) $0<a<b$ かつ $X>0$ に対し $a^X<b^X$ が成立する。x が 0 に近づくとき $x<\dfrac{1}{2}$ としてよい。$0<x<\dfrac{1}{2}$ かつ $\dfrac{1}{x}>0$ なので $0<x^{\frac{1}{x}}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ となる。$x\to+0$ のとき $\dfrac{1}{x}\to\infty$ なので $0\leqq\lim\limits_{x\to+0}x^{\frac{1}{x}}\leqq\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=0$ なので $\lim\limits_{x\to+0}x^{\frac{1}{x}}=0$ である。

(12) $y=\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ なので $\log y=\log\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{x}\log\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)$ となる。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\log y=\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\log\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right)'}{x'}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{a^x+b^x}{2}}\left(\frac{a^x\log a+b^x\log b}{2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\log a+b^x\log b}{a^x+b^x}\\&=\frac{\log a+\log b}{2}=\frac{1}{2}\log ab=\log(ab)^{\frac{1}{2}}=\log\sqrt{ab}\end{aligned}$$

が成立する。log は連続なので $\log\left(\lim_{x\to 0} y\right) = \log\sqrt{ab}$ を得る。また log は単射なので $\lim_{x\to 0} y = \sqrt{ab}$ となる。

　即ち

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\dfrac{1}{x}} = \sqrt{ab}$$

となる。