

4.4 対数関数

$a \neq 1$ を正の実数として $f(x) = a^x$ を指数関数とする。指数関数の性質のところでも述べたように、 $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ は単調増加か単調減少であるので単射である。また、 $a > 1$ のときは $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ であり、 $0 < a < 1$ のときは $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$ となり、 $(0, \infty)$ の全ての値をとるので全射である。よって、全単射である。

従って、逆関数 $f^{-1}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する。この関数を $\log_a x$ と書き、 a を底とする対数関数という。

$$y = a^x \iff x = \log_a y$$

指数法則より、次が成り立つ。

命題 4.14 (1) $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$ が成り立つ。

(2) 任意の正の実数 p, q に対して次が成り立つ。

$$\log_a pq = \log_a p + \log_a q$$

(3) 任意の正の実数 p と任意の実数 c に対して次が成り立つ。

$$\log_a p^c = c \log_a p$$

(4) (底の変換) 1 ではない任意の正の実数 a, b と任意の正の実数 p に対して次が成り立つ。

$$\log_a p = \frac{\log_b p}{\log_b a}$$

証明 (1) $a^0 = 1$ より、対数の定義を用いると $0 = \log_a 1$ となる。 $a^1 = a$ より $1 = \log_a a$ となる。

(2) a^x という関数は任意の正の実数をその値として持つから、任意の正の実数 p, q に対してある実数 s, t があって $p = a^s, q = a^t$ となる。指数法則から、 $r = a^{s+t}$ とおくと、 $r = a^{s+t} = a^s a^t = pq$ である。また、対数関数の定義から、 $s = \log_a p, t = \log_a q, s + t = \log_a r = \log_a pq$ であるから、 $\log_a r = \log_a pq = \log_a p + \log_a q$ となる。

(3) $p = a^s$ とする。指数法則から $p^c = (a^s)^c = a^{cs}$ であるから、 $\log_a p^c = cs = c \log_a p$ が成り立つ。

(4) $b^u = p, b^v = a$ とすると $\log_b p = u, \log_b a = v$ である。

$$p = b^u = b^{\frac{u}{v} \cdot v} = (b^v)^{\frac{u}{v}} = a^{\frac{u}{v}}$$

であるから、

$$\log_a p = \frac{u}{v} = \frac{\log_b p}{\log_b a}$$

となる。■

この命題から次がわかる。

系 4.15 (1) $\log_a \frac{1}{p} = -\log_a p$.

(2) $\log_a \frac{p}{q} = \log_a p - \log_a q$

このように対数は、積の計算が和の計算に置き換わる、という画期的な性質を持っている。計算機などはなく、全てを手計算で行っていた時代では、これによる恩恵は、計り知れないものがある。対数は、スコットランドのジョン・ネイピア (1550–1617) とスイスのヨプスト・ビュルギ (1552–1652) によって同じ頃に発見されたと言われているが、世に知られて、広く使われるようになったのは、ネイピアによる著作「対数の驚くべき規則の叙述」(1614 年) と「対数の驚くべき規則の構成」(1619) による。これらの本の中には、ネイピアが 20 年かけて計算した詳細な対数表が含まれており (もちろん全て手計算であるにもかかわらず、ほとんど誤りがなかった)、その後のあらゆる分野における数値計算の労力を劇的に軽減した。その意味でネイピアは、その後の科学技術の発展に多大な貢献をなしたと言える。(実際にはその後、ヘンリー・ブリッグズ、アドリアン・ヴラックらがネイピアとの議論に基づいて対数表を改良し、より詳細な表を作って 1628 年に発表した。その対数表は 20 世紀に至るまで、ほとんど全ての対数表の基礎となった。)

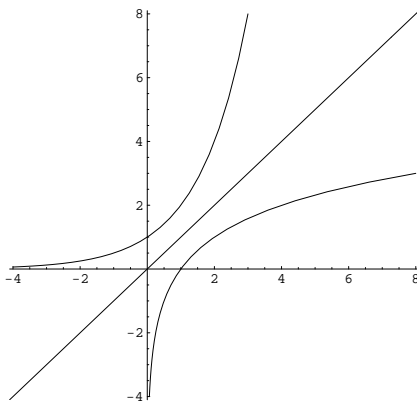
ちなみに、自然対数の底 e をネイピアの定数 というが、実際、彼が最初に考えた対数は、 e という数を意識はしていなかったが、基本的には自然対数であった。その後、より計算に便利な、10 を底とする常用対数を提案するようになる。

演習問題 4.7

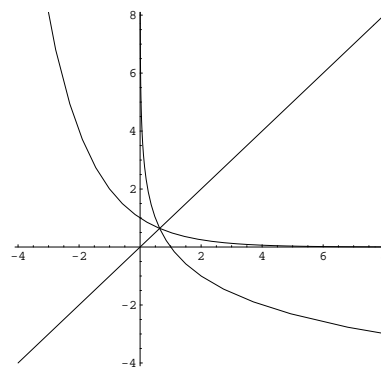
(1) a, b, c を正の実数とする。 $a^b = c^{b \log_c a}$ を示せ。

(2) a, b, c を正の実数とする。 $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ を示せ。

対数関数のグラフ 対数関数は指数関数の逆関数なので、そのグラフは、対応する指数関数のグラフを $y = x$ に関して対称に写せばよい。



$y = 2^x$ と $y = \log_2 x$ のグラフ



$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ と $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフ

4.5 逆三角関数

三角関数 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数を考えてみよう。逆関数は、全単射になっていなければ定義できないが、 $\sin x$, $\cos x$ は実数全体で定義された関数と見なすと単射ではない。そこで、逆関数を考えるためには、定義域を限定して、全単射になるような部分だけを取り出す必要がある。

$\sin x$ や $\cos x$ がその上で全単射になるような区間は無数にあり、そのうちのどれを採用したとしても、そこに限定した $\sin x$ や $\cos x$ は、当然、逆関数を持つ。そのような区間として、最も「標準的な」ものとしては、次のようなものが考えられる。

$f(x) = \sin x$ とする。この関数の定義域を $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ に制限した関数 f (名前を変更する必要はあるかもしれないが、ここでは混同して用いる) を

$$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$$

とすると、 f は全単射になる。従って、逆関数

$$f^{-1}: [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

が存在する。これを $\text{Arcsin } x$ と書く (アークサイン と読む)。 $\sin^{-1} x$ という記法も用いられるが、誤解を生みやすい記号なのでこの講義では採用しないことにする。

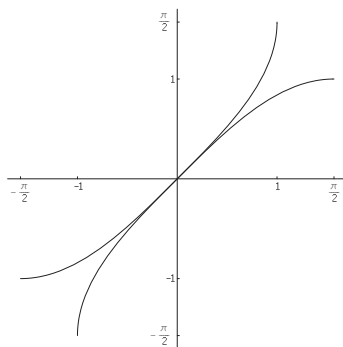


図 4.5: $\sin x$ と $\text{Arcsin } x$

$g(x) = \cos x$ とする。この関数の定義域を $[0, \pi]$ に制限した関数 g (名前を変更する必要はあるかもしれないが、ここでは混同して用いる) を

$$g: [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$

とすると、 g は全単射になる。従って、逆関数

$$g^{-1}: [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

が存在する。これを $\text{Arccos } x$ と書く (アークコサインと読む)。 $\cos^{-1} x$ という記法も用いられるが、誤解を生みやすい記号なのでこの講義では採用しないことにする。

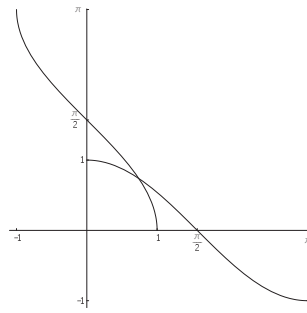


図 4.6: $\cos x$ と $\text{Arccos } x$

$\tan x$ は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ から \mathbb{R} への全単射であるから, \mathbb{R} から $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ への逆関数が存在する。これを $\text{Arctan } x$ などと書き, アークタンジェント x と読む。 $\tan^{-1} x$ という記法も用いられるが, 誤解を生みやすい記号なのでこの講義では採用しないことにする。

$\text{Arctan } x$ は実数全体で定義された関数なので, $\frac{\pi}{2} + n\pi$ という点で値が定義されない $\tan x$ と比べると, どちらかと言うと, より「まともな」関数である, という見方もできる。

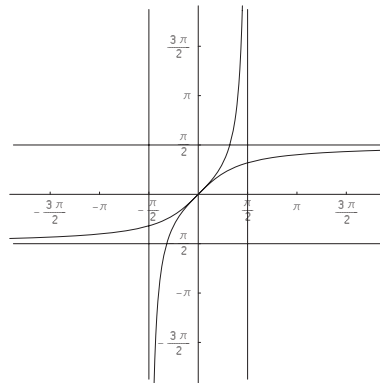


図 4.7: $\tan x$ と $\text{Arctan } x$ のグラフ

演習問題 4.8

(1) 次の値を求めよ。

$$\text{Arcsin } \frac{1}{2}, \quad \text{Arccos } \frac{1}{2}, \quad \text{Arctan } 1, \quad \text{Arcsin } \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{Arctan } \sqrt{3}, \quad \text{Arctan } \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(2) 次の式を証明せよ。

$$\text{Arcsin } \frac{3}{5} + \text{Arcsin } \frac{5}{13} = \text{Arcsin } \frac{56}{65}$$

(3) 方程式 $\text{Arccos } \frac{1}{\sqrt{5}} = \text{Arctan } x$ をみたす x を求めよ。

(4) $-1 \leq x \leq 1$ の時, $\text{Arcsin } x + \text{Arccos } x = \frac{\pi}{2}$ を示せ。

(5) $x > 0$ の時, $\text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ を示せ。

(6) $\text{Arctan } x = \text{Arcsin } \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ を示せ。