数学序論問題解説 #2

河野

演習問題 1.6　次の命題の否定命題をつくれ。また真偽を判定せよ。ここで $\mathbb{R}$ は実数全体からなる集合であり，$\mathbb{C}$ は複素数全体からなる集合とする。

(1) $\forall x \in \mathbb{R}\ \ x^2 \geqq 0$

(2) $\forall x \in \mathbb{C}\ \ x^2 \geqq 0$

(3) $\forall x \in \mathbb{R}\ \ x^4 - x^2 + \dfrac{1}{4} \geqq 0$

(4) $\forall x \in \mathbb{R}\ \ x^4 - x^2 + \dfrac{1}{5} \geqq 0$

(5) $\exists x \in \mathbb{R}\ \ x^4 - x^2 + \dfrac{1}{5} \leqq 0$

(6) $\exists x \in \mathbb{R}\ \ \big(x - 2x^2 > 0\ \wedge\ x < 0\big)$

(1)　否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{R}\ \ x^2 < 0$ 」である。任意の実数に対し $x^2 \geqq 0$ が成立するので 1.6 (1) は正しい命題であり，否定命題は正しくない命題である。

(2)　否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{C}\ \ x^2 < 0$ 」である。複素数 i は $i^2 = -1 < 0$ なので否定命題は正しい命題である。よって 1.6 (2) は偽である。

(3)　否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{R}\ \ x^4 - x^2 + \dfrac{1}{4} < 0$ 」である。$x^4 - x^2 + \dfrac{1}{4} = \left(x^2 - \dfrac{1}{2}\right)^2 \geqq 0$ なので 1.6 (3) は正しい命題であり，否定命題は正しくない命題である。

(4)　否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{R}\ \ x^4 - x^2 + \dfrac{1}{5} < 0$ 」である。$x^4 - x^2 + \dfrac{1}{5} = \left(x^2 - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} = \left(x^2 - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{20}$ が成立する。$x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とすると，$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \dfrac{1}{5} = -\dfrac{1}{20} < 0$ となるので否定命題は正しい命題である。よって 1.6 (4) は偽である。

(5)　否定命題は「 $\forall x \in \mathbb{R}\ \ x^4 - x^2 + \dfrac{1}{5} > 0$ 」である。(4) の (反) 例は (5) の例にもなっているので，1.6 (5) は正しい。

(6)　否定命題は「 $\forall x \in \mathbb{R}\ \ \big(x - 2x^2 \leqq 0\ \vee\ x \geqq 0\big)$」である。$x - 2x^2 = x(1-2x) > 0 \iff 0 < x < \dfrac{1}{2}$ なので $x - 2x^2 > 0$ かつ $x < 0$ となる実数 x は存在しない。よって 1.6 (6) は偽である。

演習問題 1.7　a, b は与えられた実数とする。

$$\text{任意の } x \in \mathbb{R} \text{ に対し } a < x \implies b < x$$

の否定命題をつくれ。またこの命題の意味を考えることにより，a と b がどのような関係にあるとき真になるか考察せよ。

$$\forall x \in \mathbb{R}\, a > x \implies b > x$$

についても同様に否定命題をつくり考察せよ。

命題

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \ a < x \implies b < x$$

を P とする。否定命題 $\neg P$ は

$$\exists x \in \mathbb{R}\ \ a < x \wedge x \leqq b$$

である。よって否定命題 $\neg P$ が正しいとき $a<b$ が成立する。逆に $a<b$ が正しいとき $x=\dfrac{a+b}{2}$ とおくと x は $a<x<b$ を満たす。このとき $\neg P$ も真であることが分かる。よって「 $a<b$ 」は $\neg P$ と同値である。以上によりもとの命題 P は「 $a<b$ 」の否定，即ち「 $a \geqq b$ 」と同値であることが分かる。

命題

$$\forall x \in \mathbb{R}\ a>x \implies b>x$$

を Q とする。否定命題 $\neg Q$ は

$$\exists x \in \mathbb{R}\ a>x \wedge x \geqq b$$

である。否定命題 $\neg Q$ が正しいとき $a>b$ が成立する。逆に $a>b$ が正しいとき $x=\dfrac{a+b}{2}$ とおくと x は $a>x>b$ をみたす。このとき $\neg Q$ は真である。よって「$a>b$」は $\neg Q$ と同値である。以上によりもとの命題 Q は「$a>b$」の否定，即ち「$b \geqq a$」と同値であることが分かる。

演習問題 1.8　「 $P(x,y): x>y$ 」とするとき「 $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \ P(x,y)$ 」と「 $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ P(x,y)$ 」の真偽を考察せよ。

「任意」と「存在」の入った命題を考えるときは，相手と 2 人ゲームをやっていると考えるのも 1 つの方法である。「任意」は相手が指定してくるもの,「存在」は自分が指定するものと考えて $P(x,y)$ が成立したら自分の勝ちと考えるわけである。前者の「 $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \ P(x,y)$ 」は相手が先手で何か x を指定してくるのに対し $x>y$ が成立するように y を選べるかという問題である。後者は自分でうまく y を選んで相手が x をどのようにえらんでも $x>y$ を成立させることができるかという問題である。

前者は任意の x に対し $y=x-1$ を選ぶことができる。前者は正しい命題である。後者は自分が y をどのように選んでも，相手が $x=y-1$ を選ぶと $x>y$ を成立させることができない。よって後者は間違った命題である。

後者を示すのに否定命題「 $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}\ \ x \leqq y$ 」を考えそれが真であることを示してもよい。

演習問題 1.9　次の命題の否定命題をつくれ。またもとの命題の真偽を確かめよ。

(1) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \ x<y$　　(2) $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \ x<y$

(3) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \ x<y$　　(4) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \ x<y$

(5) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \ x^2+y^2 \geqq 0$　　(6) $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \ x^2+y^2=0$

命題の真偽を調べるときは，元の命題の真偽を調べてもよいし，否定命題の真偽を調べてもよい。どちらか一方の真偽を調べれば十分である。

(1)　否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \ x \geqq y$ 」である。$x=1$，$y=0$ を選べば否定命題は成立する。よって元の命題は正しくない。

(2)　否定命題は「 $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \ x \geqq y$ 」である。$x=0$，$y=1$ を選べば元の命題が正しいことが分かる。

(3)　否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \ x \geqq y$ 」である。ここでは参考のため，元の命題と否定命題の両方の真偽を示そう。最初は元の命題 ； 任意の実数 x に対し $y=x+1$ とおく。このとき $x<y$

が成立するので元の命題は正しい命題であることが分かる。否定命題；背理法で示す。否定命題が正しいとすると実数 x が存在して任意の実数 y に対し $x \geqq y$ が成立する。y は任意なので特に $y = x + 1$ を選ぶと $x \geqq x + 1$ が成立し，両辺から x を引くことで $0 \geqq 1$ が成立するが，これは矛盾である。よって否定命題は正しくない。

(4)　否定命題は「 $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \ x \geqq y$ 」である。任意の実数 x に対し $y = x$ を選ぶと否定命題の成立が分かる。よって元の命題は正しくない。

(5)　否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \ x^2 + y^2 < 0$ 」である。任意の実数 x に対し $x^2 \geqq 0$ が成立する。同様に任意の実数 y に対し $y^2 \geqq 0$ が成立する。よって $x^2 + y^2 \geqq 0$ が成立するので元の命題は正しい。

(6)　否定命題は「 $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \ x^2 + y^2 \neq 0$ 」である。$x = 0$，$y = 0$ を選ぶと $x^2 + y^2 = 0^2 + 0^2 = 0$ で元の命題が正しいことが分かる。