

演習問題 1.10 次において X は Y の, 1) 必要十分条件, 2) 必要条件ではあるが十分条件ではない, 3) 十分条件ではあるが必要条件ではない, 4) 必要条件でも十分条件でもない, のいずれかであるか決定せよ。ここで x, y は実数とする。

- (1) $X : x^2 = 1, Y : x = 1$
- (2) $X : xy > 0, Y : x > 0$ かつ $y > 0$
- (3) $X : xy > 0, Y : x > 0$ または $y > 0$
- (4) $X : xy = 0, Y : x = 0$ かつ $y = 0$
- (5) $X : xy = 0, Y : x = 0$ または $y = 0$
- (6) $X : x = 1$ でないかまたは $y = 1, Y : xy = 1$
- (7) $X : xy = 0$ かつ $y = x + 1, Y : x = 0$ かつ $y = 1$
- (8) $X : x^2 + 2x - 1 = 0$ かつ $x > 0, Y : x = -1 + \sqrt{2}$

- (1) $Y \implies X$ は正しい (このことの証明は不要であろう)。 $X \implies Y$ は $x = -1$ という反例があるので正しくない。よって X は Y であるための必要条件であるが十分条件ではない。
- (2) $Y \implies X$ は正しい (正の数どうしをかけたものは正)。 $X \implies Y$ は $x = -1$ かつ $y = -1$ という反例があるので正しくない。よって X は Y であるための必要条件であるが十分条件ではない。
- (3) $X \implies Y$ は $x = -1$ かつ $y = -1$ という反例があるので正しくない。 $Y \implies X$ は $x = 1$ かつ $y = -1$ という反例があるので正しくない。よって X は必要条件でも十分条件でもない。
- (4) $Y \implies X$ は正しい (x, y のどちらか一方が 0 であれば積 $xy = 0$)。 $X \implies Y$ は $x = 0$ かつ $y = 1$ という反例があるので正しくない。よって X は必要条件である。
- (5) 積の性質から ($xy = 0 \iff x = 0 \vee y = 0$) , X は Y の必要十分条件である。
- (6) X の否定 $\neg X$ は「 $x = 1 \wedge y \neq 1$ 」である。 $\neg X$ が成立するとき積 xy は 1 にはならない。よって $\neg X \implies \neg Y$ が成立する。対偶を考えることにより $Y \implies X$ が成立する。 $x = 2, y = 2$ のとき X は正しく, Y は正しくない。よって $X \implies Y$ は成立しない。以上により X は必要条件である。
- (7) $Y \implies X$ は正しい ($x = 0, y = 1$ として xy および $x + 1$ を計算すれば分かる)。 $X \implies Y$ は $x = -1$ かつ $y = 0$ という反例があるので正しくない。よって X は必要条件であるが十分条件ではない。
- (8) $-1 + \sqrt{2} > 0$ かつ $(-1 + \sqrt{2})^2 + 2(-1 + \sqrt{2}) - 1 = 0$ なので $Y \implies X$ は正しい。 $x^2 + 2x - 1 = 0$ の必要十分条件は $x = -1 + \sqrt{2}$ または $x = -1 - \sqrt{2}$ である。このなかで正の数は $-1 + \sqrt{2}$ のみである。よって $X \implies Y$ は正しい。 X は必要十分条件である。

演習問題 1.11 次の連立方程式の解を求めよ。

- (1) $x(x^2 + y^2) = 0$ かつ $y(x^2 + y^2 - 1) = 0$
- (2) $x^3 - x + y = 0$ かつ $y^3 + x - y = 0$
- (3) $(y - 2x^2y)2^{-x^2-y^2} = 0$ かつ $(x - 2xy^2)2^{-x^2-y^2} = 0$

(1) $x(x^2 + y^2) = 0$ である必要十分条件は $x = 0$ または $x^2 + y^2 = 0$ である。 $x^2 + y^2 = 0$ である必要十分条件は $(x, y) = (0, 0)$ である。よって $x(x^2 + y^2) = 0$ である必要十分条件は $x = 0$ または $(x, y) = (0, 0)$ であるが、これは $x = 0$ と同値である。

\vee, \iff 等の記号を用いた方が分かりやすいかもしれないので、上のことを記号を用いて書いておく。

$$\begin{aligned} x(x^2 + y^2) = 0 &\iff (x = 0) \vee (x^2 + y^2 = 0) \\ x^2 + y^2 = 0 &\iff (x, y) = (0, 0) \end{aligned}$$

なので

$$(x = 0) \vee (x^2 + y^2 = 0) = 0 \iff (x = 0) \vee (x, y) = (0, 0) \iff x = 0$$

となる。

よって与えられた連立方程式は連立方程式

$$(x = 0) \wedge (x^2 + y^2 - 1 = 0)$$

と同値である。 $x = 0$ を 2 番目の式に代入すると $y(y^2 - 1) = 0$ となり、 $y = 0$ または $y = 1$ または $y = -1$ となる。

これらの解を最初に式に代入すると式は成立する。よって求める解は $(x, y) = (0, 0)$ または $(x, y) = (0, 1)$ または $(x, y) = (0, -1)$ である。

(2) $x^3 - x + y = 0$ を 1 式、 $y^3 + x - y = 0$ を 2 式とする。1 式と 2 式を加えると $x^3 + y^3 = 0$ を得る。 $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 0$ なので

$$x^3 + y^3 = 0 \iff (x + y = 0 \vee x^2 - xy + y^2 = 0)$$

が成立している。

$$x^2 - xy + y^2 = \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$$

なので

$$x^2 - xy + y^2 = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}y = 0 \wedge y = 0\right) \iff (x = 0 \wedge y = 0)$$

となる。よって

$$(x + y = 0 \vee x^2 - xy + y^2 = 0) \iff (x + y = 0 \vee (x, y) = (0, 0)) \iff x + y = 0$$

が成立するので

$$x^3 + y^3 = 0 \iff x + y = 0$$

が分かる。この式を 3 式とすると

$$1 \text{ 式} \wedge 2 \text{ 式} \iff 1 \text{ 式} \wedge 3 \text{ 式}$$

が成立するので、1 式と 3 式からなる連立方程式を解けばよいことが分かる。3 式を 1 式に代入することにより $x^3 - 2 = 0$ が得られる。 $x^3 - 2x = x(x^2 - 2) = x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$ なので $x = 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ となる。

これらの解を最初に式に代入すると式は成立する。よって解は $(x, y) = (0, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ である。

(3) 指数関数は 0 になることはないので連立方程式は $y - 2x^2y = 0$ (1 式) かつ $x - 2xy^2 = 0$ (2 式) と考えることができる。

$$y - 2x^2y = y(1 - 2x^2) = 0 \iff y = 0 \text{ または } 1 - 2x^2 = 0$$

$$x - 2xy^2 = x(1 - 2y^2) = 0 \iff x = 0 \text{ または } 1 - 2y^2 = 0$$

よって

$$\begin{aligned} 1 \text{ 式かつ } 2 \text{ 式} &\iff (1) x = 0 \text{ かつ } y = 0, \text{ または} \\ &(2) x = 0 \text{ かつ } 1 - 2x^2 = 0, \text{ または} \\ &(3) 1 - 2y^2 = 0 \text{ かつ } y = 0, \text{ または} \\ &(4) 1 - 2y^2 = 0 \text{ かつ } 1 - 2x^2 = 0 \end{aligned}$$

が成立する。(1) のときは $(x, y) = (0, 0)$ になる。(2) のときは $x = 0$ を $1 - 2x^2 = 0$ を代入すると $1 = 0$ が成立する。これは矛盾なのでこのとき解は存在しない。(3) のとき $y = 0$ を $1 - 2y^2 = 0$ を代入すると $1 = 0$ が成立する。これは矛盾なのでこのとき解は存在しない。(4) のときは $1 - 2x^2 = 0$ より $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, $1 - 2y^2 = 0$ より $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。

これらの解を最初に式に代入すると式は成立する。以上により

$$(x, y) = (0, 0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

を得る。