数学序論問題解説 #5

河野

演習問題 2.1　次の集合を表せ。ただし例 2.1 (2) の形で表示せよ。

(1) 5 の倍数となるような自然数全体の集合
(2) 3 で割ると余りが 2 となるような自然数 全体の集合
(3) 5 で割ると余りが 3 となるような自然数 全体の集合
(4) 3 で割ると余りが 2 であり，5 で割ると余りが 3 となるような自然数全体の集合
　(ヒント：この集合の元はある数 (15 かな?) で割ると余りがある数である。)

(1)　「$\{5k \mid k \in \mathbb{N}\}$」とのみ書いてある解答も間違いとはいえないが，ここは集合の記号に慣れることが目的なので，詳しく (しつこく) 解答しておく。自然数 n を p で割った余りが r というのは講義で説明したように

$$\exists q \in \mathbb{Z} \quad n = pq + r \qquad (0 \leqq r < n)$$

である。

5 の倍数となるような自然数全体の集合を B と書くと $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ は 5 で割り切れる}\}$ となる。$A = \{5k \mid k \in \mathbb{N}\}$ とするとき $A = B$ であることを示せばよい。

$$A = B \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \subseteq B \quad \wedge \quad B \subseteq A$$

なので $A \subseteq B$ かつ $B \subseteq A$ を示す。最初に $A \subseteq B$ を示す。

$$A \subseteq B \quad \Longleftrightarrow \quad (\,\forall a \;\; a \in A \Longrightarrow a \in B\,)$$

なので $a \in A$ となる任意の a をとる。このときある自然数 k が存在して $a = 5k$ と書ける。$5k$ は自然数 (自然数 $\times$ 自然数は自然数である) なので $a \in \mathbb{N}$ である。また $a = 5k\,(k \in \mathbb{N})$ なので a は 5 で割り切れる。よって $a \in B$ となる。よって $A \subseteq B$ が成立する。

次に $B \subseteq A$ を示す。a を B の任意の元とする。a は 5 で割り切れる自然数なのである整数 k が存在して $a = 5k$ と書ける。ここで $k \leqq 0$ とすると $a = 5k \leqq 0$ となり自然数であることに矛盾，よって $k > 0$ である。k は整数なので $k \in \mathbb{N}$ となり，$a \in A$ となる。よって $B \subseteq A$ が成立する。

(2)　結論は $A = \{3k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ である。$A = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{N}\}$ は間違い。これでは 2 が A に含まれない。この表示では余りが直接は見にくいので $A = \{3(k-1) + 2 \mid k \in \mathbb{N}\}$ とも書ける。また $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ として $A = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ という書き方もできる。

$A = \{3k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$，$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ は 3 で割ると余りが 2}\}$ とおくとき $A = B$ を示す。

最初に $A \subseteq B$ を示す。a を A の任意の元とすると，ある $k \in \mathbb{N}$ が存在して $a = 3k - 1 = 3(k-1) + 1$ と書ける。よって a は 3 で割ると 1 余る整数である。また $k \geqq 1$ より $3k - 1 \geqq 2 > 0$ となるので，a は自然数である。よって $a \in B$ となり，$A \subseteq B$ が成立する。

次に $B \subseteq A$ を示す。a を B の任意の元とすると，a は 3 で割ると余り 2 なので，ある整数 k_0 が存在して，$a = 3k_0 + 2$ となる。ここで $k_0 < 0$ とすると $k_0 \leqq -1$ なので $a = 3k_0 + 2 \leqq -3 + 2 = -1 < 0$ となる。これは a が自然数であることに矛盾するので，$k_0 \geqq 0$ である。よって $k = k_0 + 1$ とおくと $k \in \mathbb{N}$ であり，$a = 3k_0 + 2 = 3(k-1) + 2 = 3k - 1$ となる。よって $a \in A$ となり，$B \subseteq A$ が示された。以上により $A = B$ が成立する。

(3)　結論は $A = \{5k - 2 \mid k \in \mathbb{N}\}$ である。

$A = \{5k-2 \mid k \in \mathbb{N}\}$，$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ は 5 で割ると余りが $3\}$ とおくとき $A = B$ を示す。

最初に $A \subseteq B$ を示す。a を A の任意の元とすると，ある $k \in \mathbb{N}$ が存在して $a = 5k-2 = 5(k-1)+3$ と書ける。よって a は 5 で割ると 3 余る整数である。また $k \geqq 1$ より $5k-2 \geqq 3 > 0$ となるので，a は自然数である。よって $a \in B$ となり，$A \subseteq B$ が成立する。

次に $B \subseteq A$ を示す。a を B の任意の元とすると，a は 5 で割ると余り 3 なので，ある整数 k_0 が存在して，$a = 5k_0+3$ となる。ここで $k_0 < 0$ とすると $k_0 \leqq -1$ なので $a = 5k_0+3 \leqq -5+3 = -2 < 0$ となる。これは a が自然数であることに矛盾するので，$k_0 \geqq 0$ である。よって $k = k_0+1$ とおくと $k \in \mathbb{N}$ であり，$a = 5k_0+3 = 5(k-1)+3 = 5k-2$ となる。よって $a \in A$ となり，$B \subseteq A$ が示された。以上により $A = B$ が成立する。

(4) 3 で割ると余りが 2 である集合と 5 で割ると余りが 3 である集合の共通部分を少し調べてみると，15 で割ると 8 余る集合になっていることが予想される。

$A = \{15k-7 \mid k \in \mathbb{N}\}$，$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ は 3 で割ると余りが 2, x は 5 で割ると余りが $3\}$ とするとき $A = B$ を示す。最初に $A \subseteq B$ を示す。a を A の任意の元とする。$a = 15k-7\,(k \in \mathbb{N})$ と書かれているので，$a = 3(5k-3)+2$ と書き直すことができる。よって a は 3 で割ると余りは 2 である。また $a = 5(3k-2)+3$ と書けるので 5 で割ると余り 3 である。また $k \geqq 1$ より $a = 15k-7 \geqq 8 > 0$ なので a は自然数である。以上により $a \in B$ が示される。よって $A \subseteq B$ が成立する。

次に $B \subseteq A$ を示す。a を B の任意の元とする。3 で割ると余りが 2 なので，ある整数 k_1 が存在して $a = 3k_1+2$ と書ける。5 で割ると余りが 3 なのである整数 k_2 が存在して $a = 5k_2+3$ と書ける。$5k_2+3 = 3k_1+2$ なので $5k_2+1 = 3k_1$ となっている。k_2 を 3 で割った余りを r とすると，ある整数 k_3 が存在して $k_2 = 3k_3+r$ と書ける。$r = 0$ または 1 または 2 である。このとき $5(3k_3+r)+1 = 15k_3+5r+1 = 3k_1$ は 3 で割り切れる。$r = 0$ のときこの数を 3 で割った余りが 1 になるので，$r \neq 0$ である。また $r = 2$ のときこの数を 3 で割った余りは 2 になるので $r \neq 2$ である。$r = 1$ のときは 3 で割り切れるので $r = 1$ であることが分かる。よって $k_2 = 3k_3+1$ と書くことができる。

$$a = 5k_2+3 = 5(3k_3+1)+3 = 15k_3+8 = 15(k_3+1)-7$$

となる。$k = k_3+1$ とおく。$k_3 < 0$ のとき $k_3 \leqq -1$ なので

$$a = 15k_3+8 < -15+8 = -7 < 0$$

となり a が自然数であることに矛盾，よって $k_3 \geqq 0$ である。このとき $k \in \mathbb{N}$ となる。よって $a \in A$ であり，$B \subseteq A$ が成立する。よって $A = B$ が示された。

演習問題 2.2　次の集合 A に対しその部分集合をすべて列挙せよ。

(1) $A = \{1, 2\}$　　(2) $A = \{1, 2, 3\}$

(3) $A = \{1, 2, 3, 4\}$

(1)　部分集合をすべて列挙すると $A_0 = \{\ \}, A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}, A_3 = \{1, 2\}$ である。

(2)　部分集合をすべて列挙すると $A_1 = \{\ \}, A_2 = \{1\}, A_3 = \{2\}, A_4 = \{3\}, A_5 = \{1, 2\}$, $A_6 = \{1, 3\}, A_7 = \{2, 3\}, A_8 = \{1, 2, 3\}$ である。

(3)　部分集合をすべて列挙すると $A_1 = \{\ \}, A_2 = \{1\}, A_3 = \{2\}, A_4 = \{3\}, A_5 = \{4\}$,

$A_6 = \{1,2\}$,$A_7 = \{1,3\}$,$A_8 = \{1,4\}, A_9 = \{2,3\}, A_{10} = \{2,4\}, A_{11} = \{3,4\}, A_{12} = \{1,2,3\}, A_{13} = \{1,2,4\}, A_{14} = \{1,3,4\}, A_{15} = \{2,3,4\}, A_{16} = \{1,2,3,4\}$ である。

演習問題 2.3

(1) 例 2.3 の (2) を証明せよ。
(2) $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$ ではないことを定義に基づいて証明せよ。
(3) $\mathbb{N} = \mathbb{Z}$ ではないことを定義に基づいて証明せよ。

(1) n を $\{4k \mid k \in \mathbb{N}\}$ の任意の元とすると，ある自然数 k が存在して $n = 4k$ と書ける。このとき $k_1 = 2k$ とおくと $n = 4k = 2 \cdot 2k = 2k_1$ なので $n \in \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ となっている。よって $\{4k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ が成立している。
(2) $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$ の定義は $\mathbb{Z}$ の任意の元 a が $\mathbb{N}$ に含まれていることであった。即ち

$$\forall a \ \ a \in \mathbb{Z} \implies a \in \mathbb{N}$$

である。この命題の否定は

$$\exists a \ \ a \in \mathbb{Z} \wedge a \notin \mathbb{N}$$

である。a として -1 をとってくると $-1 \in \mathbb{Z}$ かつ $-1 \notin \mathbb{N}$ となっているので，否定命題が証明される。よってもとの $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$ は正しくないことが示された。
(3) $\mathbb{N} = \mathbb{Z}$ の定義は $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ および $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$ が共に成立することであった。(2) より $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$ が成立しないので，$\mathbb{N} = \mathbb{Z}$ は成立しない。

演習問題 2.4 次の A, B,C に関し $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$, $B \cup C$, $A \cap C$, $A \cup C$,$(A \cap B) \cap C$,$(A \cup B) \cup C$ を求めよ。また $A \cap (B \cup C)$,$(A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C)$,$(A \cup B) \cap (A \cup C)$ を求めよ。

(1) $A = \{1,2,3,4\}$,$B = \{1,3,5,6\}$,$C = \{1,2,6,7\}$
(2) $A = \{1,2,3,4,5\}$,$B = \{1,2,3\}$,$C = \{5,6,7\}$
(3) $A = \{1,2,3,4\}$,$B = \{1,3,5\}$,$C = \{\ \}$

(1) $A \cap B = \{1,3\}$, $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B \cap C = \{1,6\}$, $B \cup C = \{1,2,3,5,6,7\}$, $A \cap C = \{1,2\}$, $A \cup C = \{1,2,3,4,6,7\}$, $(A \cap B) \cap C = \{1\}$, $(A \cup B) \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
$A \cap (B \cup C) = \{1,2,3,4\} \cap \{1,2,3,5,6,7\} = \{1,2,3\}$, $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1,3\} \cup \{1,2\} = \{1,2,3\}$, $A \cup (B \cap C) = \{1,2,3,4\} \cup \{1,6\} = \{1,2,3,4,6\}$, $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1,2,3,4,5,6\} \cap \{1,2,3,4,6,7\} = \{1,2,3,4,6\}$
(2) $A \cap B = \{1,2,3\}$, $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$, $B \cap C = \{\ \}$, $B \cup C = \{1,2,3,5,6,7\}$, $A \cap C = \{5\}$, $A \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $(A \cap B) \cap C = \{\ \}$, $(A \cup B) \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
$A \cap (B \cup C) = \{1,2,3,4,5\} \cap \{1,2,3,5,6,7\} = \{1,2,3,5\}$, $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1,2,3\} \cup \{5\} = \{1,2,3,5\}$, $A \cup (B \cap C) = \{1,2,3,4,5\} \cup \{\ \} = \{1,2,3,4,5\}$, $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1,2,3,4,5\} \cap \{1,2,3,4,5,6,7\} = \{1,2,3,4,5\}$
(3) $A \cap B = \{1,3\}$, $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$, $B \cap C = \{\ \}$, $B \cup C = \{1,3,5\}$, $A \cap C = \{\ \}$, $A \cup C = \{1,2,3,4\}$, $(A \cap B) \cap C = \{\ \}$, $(A \cup B) \cup C = \{1,2,3,4,5\}$

$A\cap(B\cup C)=\{1,2,3,4\}\cap\{1,3,5\}=\{1,3\}$, $(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{1,3\}\cup\{\ \}=\{1,3\}$, $A\cup(B\cap C)=\{1,2,3,4\}\cup\{\ \}=\{1,2,3,4\}$, $(A\cup B)\cap(A\cup C)=\{1,2,3,4,5\}\cap\{1,2,3,4\}=\{1,2,3,4\}$

演習問題 2.5　A, B, C を集合とする。

(1) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
(2) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

を証明せよ。

[**ヒント：**] これらは，２つの集合が等しい，ということを示す問題である。２つの集合 A, B が $A=B$ である，ということの定義は,「 $A\subseteq B$ かつ $B\subseteq A$ 」 ということだったので，$A=B$ を示せ，ということは,「 $A\subseteq B$ かつ $B\subseteq A$ 」 を示せ，ということである。

$A\subseteq B$ の定義は,「 A の全ての元が B に含まれる 」 ということだったので，上の問題 (1) について言うならば，$x\in A\cap(B\cup C)$ ならば $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$ であることを示し，$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$ ならば $x\in A\cap(B\cup C)$ であることを示せば良い，ということになる。

(1)　最初に $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$ を示す。x を $A\cap(B\cup C)$ の任意の元とする。このとき

$$x\in A\quad\wedge\quad x\in B\cup C$$

が成立している。これは

$$x\in A\quad\wedge\quad(x\in B\vee x\in C)$$

と同値である。論理のところで学んだように命題 P,Q,R に対し $P\wedge(Q\vee R)\equiv(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$ が成立する。よって上の命題は

$$(x\in A\wedge x\in B)\quad\vee\quad(x\in A\wedge x\in C)$$

と同値である。$x\in A\wedge x\in B$ は $x\in A\cap B$ と同値であり，$x\in A\wedge x\in C$ は $x\in A\cap C$ と同値なので

$$x\in A\cap B\vee x\in A\cap C$$

と同値である。よって

$$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

が成立することが分かり，$A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$ が成立する。

逆に $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$ ならば $x\in A\cap(B\cup C)$ であることを示す。x を $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ の任意の元とする。このとき

$$x\in A\cap B\quad\vee\quad x\in A\cap C$$

が成立している。上と同様に同値な命題で変形していくと順に

$$(x\in A\wedge x\in B)\quad\vee\quad(x\in A\wedge x\in C)$$

$$x\in A\quad\wedge\quad(x\in B\vee x\in C)$$

$$x\in A\quad\wedge\quad x\in B\cup C$$

となるので $x \in A \cap (B \cup C)$ が成立する。以上により $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ の成立が示される。

(2) (1) と同様に示すことができるが，ここでは少し違う証明の仕方を紹介しておく。ただし次の結果は使用する；$A \subseteq B$ かつ $C \subseteq D \implies A \cap C \subseteq B \cap D$ 及び $A \cup C \subseteq B \cup D$ が成立する。最初に

$$\forall x \ \ x \in A \cup (B \cap C) \implies x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

であることを示す。x を $A \cup (B \cap C)$ の任意の元とする。このとき

$$x \in A \ \vee \ x \in B \cap C$$

が成立している。$A \subseteq A \cup B$ かつ $A \subseteq A \cup C$ なので $A \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ が成立している。$x \in A$ が成立するときは

$$x \in A \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

より $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ が成立する。

$B \subseteq A \cup B$ かつ $C \subseteq A \cup C$ より $B \cap C \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ が成立している。$x \in B \cap C$ が成立するときは

$$x \in B \cap C \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

より $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ が成立する。いずれの場合も成立するので，成立が示された。

次に $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ならば $x \in A \cup (B \cap C)$ であることを示す。x を $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ の任意の元とする。このとき

$$x \in A \cup B \text{ かつ } x \in A \cup C$$

が成立している。(a) $x \in A$ の場合と (b) $a \notin A$ の場合に分ける。

(a) の場合は $A \subseteq A \cup (B \cap C)$ より $x \in A \cup (B \cap C)$ が成立する。

(b) の場合 $x \in A \cup B$ かつ $x \notin A$ なので $x \in B$ が成立している。また $x \in A \cup C$ かつ $x \notin A$ なので $x \in C$ が成立している。よって $x \in B \cap C$ である。$B \cap C \subseteq A \cup (B \cap C)$ なので $x \in A \cup (B \cap C)$ が成立する。

いずれの場合も成立しているので，成立が示された。

演習問題 2.6　演習問題 2.4 の集合 A, B に対し $A - B$, A^c, $A \times B$ を求めよ。ただしここで全体集合は $X = \{1, 2, \dots, 7\}$ とする。

(1) $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,3,5,6\}$ なので，$A - B = \{2,4\}$, $A^c = \{5,6,7\}$, $A \times B = \{(1,1),(1,3),(1,5),(1,6),(2,1),(2,3),(2,5),(2,6),(3,1),(3,3),(3,5),(3,6),(4,1),(4,3),(4,5),(4,6)\}$

(2) $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{1,2,3\}$ なので，$A - B = \{4,5\}$, $A^c = \{6,7\}$, $A \times B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3)\}$

(3) $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,3,5\}$ なので，$A - B = \{2,4\}$, $A^c = \{5,6,7\}$, $A \times B = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,1),(2,3),(2,5),(3,1),(3,3),(3,5),(4,1),(4,3),(4,5)\}$

演習問題 2.7　X を全体集合とし A と B をその部分集合とするとき，次を証明せよ。

(1) $B \subseteq A \iff B^c \supseteq A^c$
(2) De Morgan の法則

$$
\begin{aligned}
(A \cup B)^c &= A^c \cap B^c \\
(A \cap B)^c &= A^c \cup B^c
\end{aligned}
$$

(1)　$A^c = \{\, x \in X \mid x \notin A \,\}$，$B^c = \{\, x \in X \mid x \notin B \,\}$ である。$B \subseteq A$ が成立しているとすると，

$$\forall x \;\; x \in B \implies x \in A$$

が成立している。条件の部分の対偶は $x \notin A \implies x \notin B$ なので上の命題は

$$\forall x \;\; x \notin A \implies x \notin B$$

と同値である。これは $A^c \subseteq B^c$ を意味している。
　$B^c \supseteq A^c$ が成立しているとすると，

$$\forall x \;\; x \notin A \implies x \notin B$$

が成立している。条件の部分の対偶をとると

$$\forall x \;\; x \in B \implies x \in A$$

となる。よって $B \subseteq A$ が成立する。
(2)　最初に $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ を示す。そのためには $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$ および $(A \cup B)^x \supseteq A^c \cap B^c$ を示せばよい。
　x を $(A \cup B)^c$ の任意の元とすると

$$x \notin A \cup B$$

が成立している。$x \in A$ とすると $x \in A \cup B$ となるので $x \notin A$ である。よって $x \in A^c$ が成立する。また $x \in B$ とすると $x \in A \cup B$ となるので $x \notin B$ である。よって $x \in B^c$ が成立する。よって $x \in A^c \cap B^c$ となる。以上で $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$ が示された。
　x を $A^c \cap B^c$ の任意の元とすると

$$x \notin A \;\wedge\; x \notin B$$

が成立している。$x \in A \cup B$ とすると $x \in A$ または $x \in B$ が成立するが，上より共に成立しない。よって $x \notin A \cup B$ なので $x \in (A \cup B)^c$ となる。以上で $(A \cup B)^c \supseteq A^c \cap B^c$ が示された。$(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$ 及び $(A \cup B)^c \supseteq A^c \cap B^c$ が成立するので $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ が成立する。

　次に $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ を示す。上で述べた様な証明もできるが，ここでは上の結果を用いる証明をすることにする。A，B に対し $C = A^c$，$D = B^c$ とおき，C，D に対し上の結果を適用する。

$$(C \cup D)^c = C^c \cap D^c$$

が成立している。この両者の補集合をとると $((C \cup D)^c)^c = C \cup D$ であることに注意すると

$$(C \cup D) = (C^c \cap D^c)^c$$

となる。$C^c = (A^c)^c = A$, $D^c = (B^c)^c = B$ を用いると

$$A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$$

となる。これが求めるべきものであった。