$\boxed{\text{数学序論問題解説 \#7}}$ 河野

演習問題 3.1 次の計算をせよ。

(1) $(3+5i)+(4-7i)$ (2) $(2+3i)(3-4i)$

(3) $\dfrac{5+3i}{1+2i}$ (4) $\dfrac{1}{5-2i}$

(1) $7-2i$

(2) $18+i$

(3) $\dfrac{5+3i}{1+2i}=\dfrac{(5+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\dfrac{11}{5}-\dfrac{7}{5}i$

(4) $\dfrac{1}{5-2i}=\dfrac{5+2i}{(5-2i)(5+2i)}=\dfrac{5}{29}+\dfrac{2}{29}i$

演習問題 3.2 命題 3.2 を証明せよ。

$\alpha=a+bi$，$\alpha_1=a_1+b_1i$，$\alpha_2=a_2+b_2i$ とおく。

(1) $\overline{\alpha}=a-bi=a+(-b)i$ なので，$\overline{\overline{\alpha}}=a-(-b)i=a+bi=\alpha$ となる。

(2) $\alpha_1+\alpha_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$ なので

$$\begin{aligned}\overline{\alpha_1+\alpha_2} &= \overline{(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i}\\ &= (a_1+a_2)-(b_1+b_2)i\\ &= a_1-b_1i+a_2-b_2i\\ &= \overline{\alpha_1}+\overline{\alpha_2}\end{aligned}$$

(3) $\alpha_1\cdot\alpha_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$ なので

$$\overline{\alpha_1\cdot\alpha_2} = \overline{(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i}=(a_1a_2-b_1b_2)-(a_1b_2+a_2b_1)i$$

であるが,

$$\overline{\alpha_1}\cdot\overline{\alpha_2} = (a_1-b_1i)\cdot(a_2-b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)-(a_1b_2+a_2b_1)i$$

となるので $\overline{\alpha_1\cdot\alpha_2}=\overline{\alpha_1}\cdot\overline{\alpha_2}$ が成立する。

(4)

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

なので

$$\overline{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)-(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

となる。一方

$$\frac{\overline{\alpha_1}}{\overline{\alpha_2}} = \frac{a_1-b_1i}{a_2-b_2i}=\frac{(a_1-b_1i)(a_2+b_2i)}{(a_2-b_2i)(a_2+b_2i)}==\frac{(a_1a_2+b_1b_2)-(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

となるので

$$\overline{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)} = \frac{\overline{\alpha_1}}{\overline{\alpha_2}}$$

が成立する。

演習問題 3.3　次の問いに答えよ。

(1) $\alpha = 0 \iff |\alpha| = 0$ を証明せよ。
(2) $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha||\beta|$ を示せ。

(1)　$\alpha = a_1 + a_2 i$ とおくと $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ なので

$$\alpha = 0 \iff a_1 = 0 \text{ かつ } a_2 = 0 \iff a_1^2 + a_2^2 = 0 \iff |\alpha| = 0$$

となり成立する。
(2)　$\alpha = a_1 + b_1 i$，$\beta = a_2 + b_2 i$ とおくと

$$\alpha \cdot \beta = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

なので

$$\begin{aligned} |\alpha \cdot \beta|^2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 \\ &= a_1^2 a_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + b_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 - 2a_1 b_2 a_2 b_1 + a_2^2 b_1^2 \\ &= a_1^2(a_2^2 + b_2^2) + b_1^2(a_2^2 + b_2^2) \\ &= (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \\ &= (|\alpha|\,|\beta|)^2 \end{aligned}$$

となる。$|\alpha \cdot \beta| \geqq 0$，$|\alpha| \geqq 0$，$|\beta| \geqq 0$ より $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha|\,|\beta|$ となる。
　共役複素数を用いる別解もある。紹介しておこう。$|\alpha|^2 = \alpha\overline{\alpha}$，$|\beta|^2 = \beta\overline{\beta}$ なので

$$|\alpha \cdot \beta|^2 = (\alpha\beta)\overline{\alpha\beta} = \alpha\beta\overline{\alpha}\ \overline{\beta} = \alpha\overline{\alpha}\beta\overline{\beta} = |\alpha|^2|\beta|^2$$

あとは前と同様である。

演習問題 3.4　図 3.1 を参考にして定理 3.3 を証明せよ。

(1)　O，β，$\alpha + \beta$ を頂点とする 3 角形を考える。ただし 3 角形がつぶれて 1 直線になっている場合も含むとする。この 3 角形の 3 辺の長さは $|\alpha|$，$|\beta|$，$|\alpha + \beta|$ なので三角不等式より

$$|\alpha + \beta| \leqq |\alpha| + |\beta|$$

が成立する。
(2)　O，α，β を頂点とする 3 角形を考える。ただし 3 角形がつぶれて 1 直線になっている場合も含むとする。この 3 角形の 3 辺の長さは $|\alpha|$，$|\beta|$，$|\alpha - \beta|$ なので三角不等式より

$$|\alpha| \leqq |\alpha - \beta| + |\beta|$$

が成立する。移行すると (2) 式の成立が分かる。

ここで紹介した証明は幾何的 (図形的) 証明であり，3 角形の辺の和の性質を仮定している。代数的証明も紹介しておこう。シュワルツの不等式は既知とする。

$\alpha = a + ib$，$\beta = c + id$ とおくと $\alpha + \beta = (a+c) + i(b+d)$ なので

$$|\alpha+\beta|^2 = (a+c)^2 + (b+d)^2, \quad |\alpha|^2 = a^2 + b^2, \quad |\beta|^2 = c^2 + d^2$$

となっている。シュワルツの不等式：$(ac+bd)^2 \leqq (a^2+b^2)(c^2+d^2)$ を用いると

$$\begin{aligned}
|\alpha+\beta|^2 &= (a+c)^2 + (b+d)^2 = a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2 \\
&= a^2 + b^2 + 2(ac+bd) + c^2 + d^2 \\
&\leq |\alpha|^2 + 2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} + |\beta|^2 \\
&= |\alpha|^2 + 2|\alpha|\,|\beta| + |\beta|^2 = (|\alpha| + |\beta|)^2
\end{aligned}$$

となる。$|\alpha+\beta| \geq 0$ なので

$$|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

を得る。証明した式において $\alpha \to \alpha - \beta$ という置き換えを行うと (2) の式が得られる。