数学序論問題解説 #8

河野

演習問題 3.5　次の複素数の極形式を求めよ。

(1) $1+i\sqrt{3}$　(2) -2　(3) i　(4) $2\sqrt{3}-2i$　(5) $1-\sqrt{3}i$

(1)　$|1+i\sqrt{3}|=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{4}=2$ なので

$$1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

と書ける。$2\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)$ と表してもよい。ここで $\exp(x)=e^x$ という記法を用いた。

(2)　$|-2|=\sqrt{(-2)^2+0^2}=2$ なので

$$-2=2(\cos\pi+i\sin\pi)=2e^{i\pi}$$

となる。

(3)　$|i|=\sqrt{0^2+1^2}=1$ なので

$$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)$$

となる。

(4)　$|2\sqrt{3}-2i|=\sqrt{12+4}=4$ なので

$$2\sqrt{3}-2i=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=4\exp\left(-i\frac{\pi}{6}\right)$$

となる。偏角をマイナスで選んだが $\frac{11\pi}{6}$ としてもよい。

(5)　$|1-\sqrt{3}i|=2$ なので

$$1-\sqrt{3}i=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\exp\left(-i\frac{\pi}{3}\right)$$

となる。偏角をマイナスで選んだが $\frac{5\pi}{3}$ としてもよい。

演習問題 3.6　次の問いに答えよ。

(1) $e^{i\theta}$ は，原点を中心とする半径 1 の円上の点であることを示せ。

(2) オイラーの公式を用いて次の等式を導け。

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\qquad\qquad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

(1) $|e^{i\theta}| = |\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \sqrt{1} = 1$ なので原点を中心とする半径 1 の円周上にある。

(2) $\cos(-\theta) = \cos\theta$，$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ より

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$$

となるので，

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta, \quad e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$$

となる。これから (2) の式を得る。

演習問題 3.7　次の問いに答えよ。

(1) $(e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}$ を示せ。

(2) 系 3.6 を証明せよ。

(1)

$$(e^{i\theta})^{-1} = \frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta}e^{-i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta-i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{e^{0}} = e^{-i\theta}$$

(2) n に関する数学的帰納法で証明する。$n=1$ のとき示すべき式は $(e^{i\theta})^1 = e^{i1\theta}$ なので成立している。$n=k$ のとき成立を仮定する; 即ち $(e^{i\theta})^k = e^{ik\theta}$ が成立していると仮定する。

$$(e^{i\theta})^{k+1} = (e^{i\theta})^k e^{i\theta} = e^{ik\theta}e^{i\theta} = e^{ik\theta+i\theta} = e^{i(k+1)\theta}$$

となり $n=k+1$ の成立が示された。よってすべての自然数に対し成立している。

演習問題 3.8　次の点を極形式で表し図示せよ。

(1) $\alpha = 2+2i$　　(2) $\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$　　(3) $\alpha\beta$　　(4) $\dfrac{\beta}{\alpha}$

(1) $|\alpha| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$ なので

$$\alpha = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)$$

である。

(2) $|\beta| = \sqrt{\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}} = 1$ なので

$$\beta = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \exp\left(i\frac{\pi}{6}\right)$$

である。

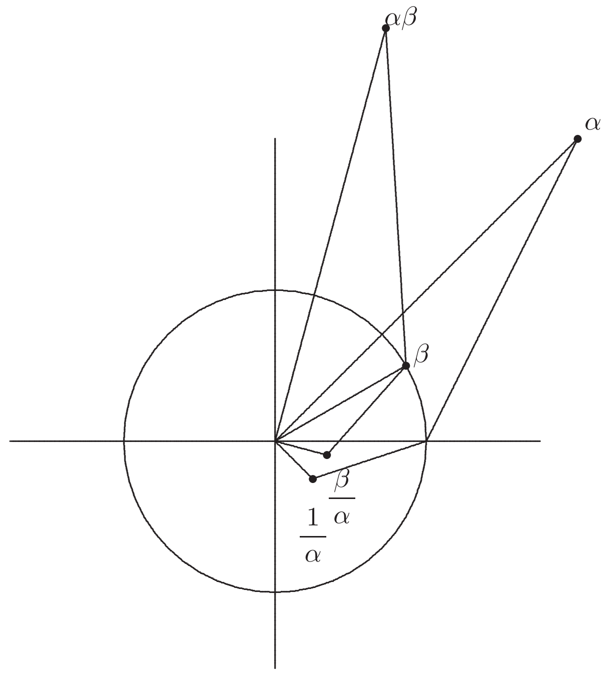
(3)

$$\alpha\beta = 2\sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}\exp\left(i\frac{5\pi}{12}\right)$$

(4)

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\exp\left(i\dfrac{\pi}{6}\right)}{2\sqrt{2}\exp\left(i\dfrac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right)\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\exp\left(i\frac{\pi}{6} - i\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\exp\left(-i\frac{\pi}{12}\right)$$

よって図示すると次図のようになっている。



演習問題 3.9

(1)　1 の 4 乗根を具体的に求め，複素平面に図示せよ。
(2)　1 の 3 乗根を具体的に求め，複素平面に図示せよ。
(3)　1 の 6 乗根を具体的に求め，複素平面に図示せよ。
(4)　1 の 5 乗根を求め，複素平面に図示せよ。

(1)　1 の 4 乗根は $x^4 - 1 = 0$ の解なので

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$$

の解である。よって解は $x = 1, -1, i, -i$ となる。図示すると最後の図のようになる。
(2)　1 の 3 乗根は $x^3 = 1$ の解なので

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

より $x = 1$ または $x^2 + x + 1 = 0$ を満たす。$x^2 + x + 1 = 0$ のとき

$$x = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

なので $1, \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ が求めるものである。$\omega = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ とおくと $\omega^2 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ なので図の様になる。

(3)　1 の 6 乗根は $x^6 = 1$ の解なので

$$x^6 - 1 = (x^3-1)(x^3+1) = (x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$$

より $x=1$ または $x=-1$ または $x^2+x+1=0$ または $x^2-x+1=0$ を満たす。$x^2+x+1=0$ のとき

$$x = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

であり，$x^2-x+1=0$ のとき

$$x = \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

なので $1, -1, \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ が求めるものである。$\lambda = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ とおくと，$\lambda^2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \omega$，$\lambda^3 = -1$，$\lambda^4 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \omega^2$，$\lambda^5 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$，なので図の様になる。

(4)　5 乗根については「具体的に求めよ」とは書いていないので，以下のことは不要である。この場合「複 2 次式」と考えることにより求めることができるので書いておく。

1 の 5 乗根は $x^5 = 1$ の解なので

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1) = 0$$

より $x=1$ または $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ を満たす。$x^4+x^3+x^2+x+1=0$ のとき両辺を x^2 で割ると $x^2+x+1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$ となる。$t = x+\dfrac{1}{x}$ とおくと $t^2 = x^2+2+\dfrac{1}{x^2}$ なので t は 2 次方程式

$$t^2+t-1=0$$

の解である。これを解くと $t = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ が得られる。$t = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ のとき

$$x + \frac{1}{x} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

を解くと

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \quad x = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

が得られる。$t = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ のとき

$$x + \frac{1}{x} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

を解くと

$$x = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \quad x = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

が得られる。よって

$$1, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}+i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}-i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-1-\sqrt{5}}{4}+i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-1-\sqrt{5}}{4}-i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

か求める解である。

$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}+i\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ とおくと

$$\begin{aligned}
\alpha^2 &= \frac{-1-\sqrt{5}}{4}+i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \\
\alpha^3 &= \frac{-1-\sqrt{5}}{4}-i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \\
\alpha^4 &= \frac{-1+\sqrt{5}}{4}-i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}
\end{aligned}$$

なので図の様になる。